Для маленьких значений — поиск в ширину.

Для больших — математическое решение.

Сначала проверим, что в эту клетку вообще можно попасть. Это верно, если p и q разной чётности (иначе мы не можем сменить цвет в шахматной раскраске), а кроме того, p и q взаимно просты (мы можем поменять любую координату только на число, кратное их наибольшему общему делителю).

Пусть мы для определённости хотим попасть из клетки $(0, 0)$ в клетку $(1, 0)$. Посчитаем ходы на $\pm p$ и ходы на $\pm q$ по каждой координате. Получается, что $ap+bq = 0$ и $up+vq = 1$. Здесь каждое неизвестное (a, b, u, v) учитывает ходы в две стороны: например, a — это количество ходов на $+p$ по координате y минус количество ходов на $-p$ по координате y.

Решения диофантова уравнения $ap + bq = 0$: $a = 0 + sq$, $b = 0 - sp$ для целых s.

Решения диофантова уравнения $up + vq = 1$: $a = +e + tq$, $b = -f - tp$ для целых t. Здесь $+e$ и $-f$ — линейное представление НОД, выбранное так, что $0 < e \leqslant q$ и $0 \leqslant f < p$. Его можно найти, например, при помощи расширенного алгоритма Евклида.

Пусть мы выбрали какие-то решения a, b, u и v этих двух уравнений. Числа a и v характеризуют ходы вида $(\pm p, \pm q)$, а числа b и u — ходы вида $(\pm q, \pm p)$. Чтобы существовал путь коня с такими характеристиками, необходимо и достаточно, чтобы числа a и v были одной чётности, а ещё чтобы числа b и u были одной чётности. Поясним это на примере: если a и v положительны и $v - a = 2k$, где $k \geqslant 0$, можно сделать a ходов $(+p, +q)$, после чего ещё k ходов $(+p, +q)$ и ещё k ходов $(-p, +q)$. При различной чётности ходы коня, соответствующие числам, сделать не получится. Всего будет сделано $\max(|a|, |v|)$ ходов вида $(\pm p, \pm q)$. Аналогично можно сделать $\max(|b|, |u|)$ ходов вида $(\pm q, \pm p)$.

Рассмотрим несколько небольших по абсолютной величине решений двух уравнений и выясним, какие из них удовлетворяют условиям совпадения чётности.

$ap + bq = 0$: $\quad \ldots;\quad a = -2q,\ b = +2p;\quad a = -q,\ b = +p;\quad a = 0,\ b = 0;\quad a = +q,\ b = -p;$ $a = +2q,\ b = -2p;\quad \ldots$

Случаи $(+tq, -tp)$ и $(-tq, +tp)$ симметричны, поэтому можно рассматривать только один из них.

$up + vq = 1$: $\quad \ldots;\quad u = +e - 2q,\ v = -f + 2p;\quad u = +e - q,\ v = -f + p;\quad u = +e,\ v = -f;$ $u = +e + q,\ v = -f - p;\quad \ldots$

Как мы уже знаем, чтобы путь коня существовал, числа p и q должны иметь разную чётность. Пусть для определённости p — чётное число, а q — нечётное.

Тогда f — нечётное число (иначе $ep - fq$ делится на 2). Следовательно, любое $v = -f - tp$ также нечётно. По условию о чётности a также должно оказаться нечётным, то есть нам подходят $a = \pm q$, $a = \pm 3q$ и так далее.

Кроме того, b — всегда чётное число, поскольку оно делится на p. По условию о чётности u подходит каждое второе u, то есть либо $u = +e-2q$, $u = +e$, $u = +e+2q$, …, либо $u = +e-3q$, $u = +e - q$, $u = +e + q$. Выберем $u = +e$ или $u = +e - q$ в зависимости от случая.

Итак, мы можем построить путь коня, для которого характеристиками будут $a = q$, $b = p$, $u = +e$ или $u = +e - q$, $v = -f$ или $v = -f + p$. Для u возможен ровно один из двух случаев в зависимости от чётности числа e. Случай для v выбирается однозначно по значению u. Количество ходов в этом пути будет равно $\max(|a|, |v|) + \max(|b|, |u|)$. В первом случае это $\max(q, f) + \max(p, e)$. Во втором случае это $\max(q, p - f) + \max(p, q - e)$. Напомним, что по выбору представителей e и f верно, что $0 \leqslant f, p - f \leqslant p$ и $0 \leqslant e, q - e \leqslant q$. Поэтому в обоих случаях количество ходов лежит в пределах от $p + q$ до $2\max(p, q)$ включительно (можно доказать это, рассмотрев два случая: $p \geqslant q$ и $q \geqslant p$).

Нетрудно убедиться, что любой другой выбор решений двух уравнений потребует не меньше ходов, чем $2\max(p, q)$. Действительно, при выборе $a = +sq$, $b = -sp$ для $s \geqslant 2$ величина $a + b$ уже не меньше $2(p + q)$. При выборе же других u и v оказывается, что $|u| \geqslant q$ и $|v| \geqslant p$, а значит, каждая из величин $\max(|a|, |v|)$ и $\max(|b|, |u|)$ не меньше, чем $\max(p, q)$. Значит, найденное решение является оптимальным.