

Все следующие задачи следует решать самостоятельно, без помощи компьютера, интернета и/или соседей.

1. Каждая из следующих таблиц — отдельная задача с такой предысторией.

Вы решаете некоторую задачу, которая сводится к вычислению функции вида  $f(x, y)$  для целых неотрицательных аргументов. Пока вы не придумали быстрое решение. Однако вам удалось реализовать медленное решение и с его помощью найти первые несколько значений:  $f(0, 0)$ ,  $f(1, 0)$ , ...,  $f(9, 0)$ ,  $f(0, 1)$ , ...,  $f(9, 9)$ . Эти значения и приведены в таблице.

В первой строке каждой таблицы указан аргумент  $x$ , а в первом столбце — аргумент  $y$ . В остальных клетках таблицы указаны значения функции для  $y$  из той же строки и  $x$  из того же столбца. Знак «-» означает, что функция не определена для такой пары аргументов.

Что же это за функции? Постарайтесь для каждой таблицы придумать как можно более естественный вариант ответа. Допускается ответ в виде формулы, алгоритма или словесного описания.

a.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	2	2	3	4	5	6	7	8	9
3	3	3	3	3	4	5	6	7	8	9
4	4	4	4	4	4	5	6	7	8	9
5	5	5	5	5	5	5	6	7	8	9
6	6	6	6	6	6	6	6	7	8	9
7	7	7	7	7	7	7	7	7	8	9
8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	9
9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9

b.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	-	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	-	1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	-	2	1	0	0	0	0	0	0	0
3	-	3	1	1	0	0	0	0	0	0
4	-	4	2	1	1	0	0	0	0	0
5	-	5	2	1	1	1	0	0	0	0
6	-	6	3	2	1	1	1	0	0	0
7	-	7	3	2	1	1	1	1	0	0
8	-	8	4	2	2	1	1	1	1	0
9	-	9	4	3	2	1	1	1	1	1

c.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	-	-	-	-	-	-	-	-	-
1	1	0	-	-	-	-	-	-	-	-
2	1	1	0	-	-	-	-	-	-	-
3	1	1	1	0	-	-	-	-	-	-
4	2	1	1	1	0	-	-	-	-	-
5	2	2	1	1	1	0	-	-	-	-
6	2	2	2	1	1	1	0	-	-	-
7	2	2	2	2	1	1	1	0	-	-
8	2	2	2	2	2	1	1	1	0	-
9	3	2	2	2	2	2	1	1	1	0

d.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
2	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
3	0	1	1	2	0	1	1	2	0	1
4	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0
5	0	1	0	1	1	2	1	2	0	1
6	0	0	1	1	1	1	2	2	0	0
7	0	1	1	2	1	2	2	3	0	1
8	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
9	0	1	0	1	0	1	0	1	1	2

e.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	1	2	2	3	2	3	2	3	2	3
3	1	2	3	2	3	4	2	3	4	2
4	1	2	3	2	3	2	3	4	2	3
5	1	2	3	4	3	2	3	4	5	4
6	1	2	2	2	3	3	2	3	3	3
7	1	2	3	3	4	4	3	2	3	4
8	1	2	2	4	2	5	3	3	2	3
9	1	2	3	2	3	4	3	4	3	2

f.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
1	-	-	1	1	1	1	1	1	1	1
2	-	-	-	2	-	3	-	4	-	5
3	-	-	-	-	3	2	-	5	3	-
4	-	-	-	-	-	4	-	2	-	7
5	-	-	-	-	-	-	5	3	5	2
6	-	-	-	-	-	-	-	6	-	-
7	-	-	-	-	-	-	-	-	7	4
8	-	-	-	-	-	-	-	-	-	8
9	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

2. Заданы числа  $n$  и  $k$ . Используя  $O(k\sqrt{n})$  времени и памяти, найдите количество последовательностей  $a = (a_1, a_2, \dots, a_k)$  таких, что  $a_1 = 1$ ,  $a_k = n$  и  $a_i \leq a_{i-1}$  для  $i = 2, 3, \dots, k$ .
3. На плоскости заданы  $n$  окружностей: для каждой известны координаты её центра и радиус. Все радиусы положительные. Используя  $O(\text{Poly}(n))$  времени и памяти, найдите количество различных точек на плоскости, которые лежат на двух или более окружностях из заданных.
4. Используя  $o(n)$  — то есть асимптотически меньше, чем  $O(n)$  — времени и памяти, найдите количество пар целых чисел  $(x, y)$  таких, что  $0 \leq x \leq n$  и  $0 \leq y \leq \sqrt{x}$ .
5. В неориентированном графе из  $n$  вершин степень каждой вершины не меньше, чем  $\frac{n}{2}$ . Кроме того, в графе нет петель и кратных рёбер. Докажите, что граф связан.