Сортировки

Иван Казменко

Кружок по алгоритмам и структурам данных в СПбГДТЮ

Четверг, 24 ноября 2011 года

Оглавление

Оглавление

Постановка задачи

Постановка задачи:

- Есть массив из n объектов: a_1, a_2, …, a_n.
- К примеру, это могут быть числа, пары чисел, строки, последовательности, …
- Для каждой пары объектов (p, q) известно, верно ли, что $p < q$.
- Нужно расположить эти объекты в порядке неубывания.
- Формально, нужно найти такую перестановку p_1, p_2, …, p_n, что $a_{p_1} \leqslant a_{p_2} \leqslant \ldots \leqslant a_{p_n}$.

Критерии качества:

- Время работы: $O(n^2)$, $O(n \log n)$, $O(n)$, …
- Дополнительно используемая память: $O(n)$, $O(1)$, …
- Устойчивость: сохраняется ли исходный порядок для равных объектов.

Постановка задачи

Постановка задачи:

- Есть массив из n объектов: $a_1, a_2, \ldots, a_n$.
- К примеру, это могут быть числа, пары чисел, строки, последовательности, ...
- Для каждой пары объектов (p, q) известно, верно ли, что $p < q$.
- Нужно расположить эти объекты в порядке неубывания.
- Формально, нужно найти такую перестановку $p_1, p_2, \ldots, p_n$, что $a_{p_1} \leqslant a_{p_2} \leqslant \ldots \leqslant a_{p_n}$.

Критерии качества:

- Время работы: $O(n^2)$, $O(n \log n)$, $O(n)$, ...
- Дополнительно используемая память: $O(n)$, $O(1)$, ...
- Устойчивость: сохраняется ли исходный порядок для равных объектов.

Быстрая сортировка

Идея — алгоритм Q (QuickSort):

Q1. Выберем один элемент $x = a_k$.

Q2. Поставим x на то место, где он окажется после сортировки.

Q3. Поставим слева от x все элементы $\leqslant x$, а справа все элементы $\geqslant x$.

Q4. Отсортируем рекурсивно получившиеся левую и правую части.

Как выполнить пункты Q2 и Q3 — алгоритм P (Partition):

P1. Найдём y — самый левый элемент, не меньший x.

P2. Найдём z — самый правый элемент, не больший x.

P3. Если y стоит левее z, поменяем местами y и z и запустим алгоритм P для отрезка массива между ними.

P4. В противном случае работа алгоритма P завершена.

Заметим, что алгоритм P работает за линейное время от длины массива.

Быстрая сортировка

Идея — алгоритм `Q` (QuickSort):

`Q1.` Выберем один элемент $x = a_k$.

`Q2.` Поставим x на то место, где он окажется после сортировки.

`Q3.` Поставим слева от x все элементы $\leqslant x$, а справа все элементы $\geqslant x$.

`Q4.` Отсортируем рекурсивно получившиеся левую и правую части.

Как выполнить пункты `Q2` и `Q3` — алгоритм `P` (Partition):

`P1.` Найдём y — самый левый элемент, не меньший x.

`P2.` Найдём z — самый правый элемент, не больший x.

`P3.` Если y стоит левее z, поменяем местами y и z и запустим алгоритм `P` для отрезка массива между ними.

`P4.` В противном случае работа алгоритма `P` завершена.

Заметим, что алгоритм `P` работает за линейное время от длины массива.

Быстрая сортировка

Идея — алгоритм `Q` (QuickSort):

`Q1.` Выберем один элемент $x = a_k$.

`Q2.` Поставим x на то место, где он окажется после сортировки.

`Q3.` Поставим слева от x все элементы $\leqslant x$, а справа все элементы $\geqslant x$.

`Q4.` Отсортируем рекурсивно получившиеся левую и правую части.

Как выполнить пункты `Q2` и `Q3` — алгоритм `P` (Partition):

`P1.` Найдём y — самый левый элемент, не меньший x.

`P2.` Найдём z — самый правый элемент, не больший x.

`P3.` Если y стоит левее z, поменяем местами y и z и запустим алгоритм `P` для отрезка массива между ними.

`P4.` В противном случае работа алгоритма `P` завершена.

Заметим, что алгоритм `P` работает за линейное время от длины массива.

Быстрая сортировка: код

```
quick_sort (a, l, r):
  if l >= r:
    return
  x = a[random (l, r)]
  m = partition (a, l, r, x)
  quick_sort (a, l, m)
  quick_sort (a, m + 1, r)
```

```
partition (a, l, r, x):
  i = l,  j = r
  while i < j:
    while a[i] < x:
      i += 1
    while x < a[j]:
      j -= 1
    if i > j:
      break
    swap (a[i], a[j])
    i += 1,  j -= 1
  return j
```

Быстрая сортировка: код

```
quick_sort (a, l, r):
  if l >= r:
    return
  x = a[random (l, r)]
  m = partition (a, l, r, x)
  quick_sort (a, l, m)
  quick_sort (a, m + 1, r)
```

```
partition (a, l, r, x):
  i = l,  j = r
  while i < j:
    while a[i] < x:
      i += 1
    while x < a[j]:
      j -= 1
    if i > j:
      break
    swap (a[i], a[j])
    i += 1,  j -= 1
  return j
```

Быстрая сортировка: альтернативный код

```
Q     quick_sort (a, l, r):
        if l >= r:
          return
Q1      x = a[random (l, r)]
        i = l,  j = r
P       while i <= j:
P1        while a[i] < x:
P1          i += 1
P2        while x < a[j]:
P2          j -= 1
P4        if i > j:
P4          break
P3        swap (a[i], a[j])
P3        i += 1,  j -= 1
Q4      quick_sort (a, l, j)
Q4      quick_sort (a, i, r)
```

Быстрая сортировка: альтернативный код

```
Q     quick_sort (a, l, r):
        if l >= r:
          return
Q1      x = a[random (l, r)]
        i = l,  j = r
P       while i <= j:
P1        while a[i] < x:
P1          i += 1
P2        while x < a[j]:
P2          j -= 1
P4        if i > j:
P4          break
P3        swap (a[i], a[j])
P3        i += 1,  j -= 1
Q4      quick_sort (a, l, j)
Q4      quick_sort (a, i, r)
```

Быстрая сортировка: анализ

Общие наблюдения:

- На каждом уровне вложенности рекурсии алгоритма `Q` отрезки, на которых он запускается, не имеют общих точек.
- Алгоритм `P` работает за линейное время от длины отрезка.
- Общее время работы — $O(n \cdot d)$, где d — максимальный уровень вложенности рекурсии.

Быстрая сортировка: анализ

Общие наблюдения:

- На каждом уровне вложенности рекурсии алгоритма `Q` отрезки, на которых он запускается, не имеют общих точек.
- Алгоритм `P` работает за линейное время от длины отрезка.
- Общее время работы — $O(n \cdot d)$, где d — максимальный уровень вложенности рекурсии.

Лучший случай:

- Пусть каждый отрезок делится алгоритмом `P` поровну.
- Тогда $d = \log_2 n$ и общее время работы — $O(n \log n)$.
- На практике сложно выбрать x так, чтобы поделить отрезок поровну.

Быстрая сортировка: анализ

Общие наблюдения:

- На каждом уровне вложенности рекурсии алгоритма `Q` отрезки, на которых он запускается, не имеют общих точек.
- Алгоритм `P` работает за линейное время от длины отрезка.
- Общее время работы — $O(n \cdot d)$, где d — максимальный уровень вложенности рекурсии.

Худший случай:

- Пусть каждый отрезок делится алгоритмом `P` на часть из одного элемента и часть изо всех оставшихся.
- Тогда $d = n - 1$ и общее время работы — $O(n^2)$.
- Например, так будет, если все числа различны, а в качестве x на каждом отрезке выбирается либо самый маленький, либо самый большой элемент этого отрезка.

Быстрая сортировка: анализ

Общие наблюдения:

- На каждом уровне вложенности рекурсии алгоритма `Q` отрезки, на которых он запускается, не имеют общих точек.
- Алгоритм `P` работает за линейное время от длины отрезка.
- Общее время работы — $O(n \cdot d)$, где d — максимальный уровень вложенности рекурсии.

Средний случай:

- Пусть выбор x случаен.
- Тогда с вероятностью $\geqslant \frac{1}{2}$ в каждом отрезке длины n выбирается разделитель, попадающий в позиции $[\frac{1}{4}n; \frac{3}{4}n]$.
- Значит, в среднем каждое второе разделение делит отрезок в отношении не более $3:1$ (бóльшая часть имеет длину $\leqslant \frac{3}{4}n$).
- Поэтому средняя глубина рекурсии будет не больше $2 \cdot \log_{\frac{4}{3}} n$.
- А значит, и общее время работы не превосходит $O(n \log n)$.

Сортировка слиянием

Идея — алгоритм `M` (MergeSort):

`M1.` Поделим массив на две равные по длине части.

`M2.` Отсортируем рекурсивно левую и правую части.

`M3.` Из двух отсортированных половин получим отсортированный массив.

Как выполнить пункт `M3` — алгоритм `MS` (Merge Segments):

`MS1.` Рассмотрим первые числа левой и правой частей.

`MS2.` Выберем из них минимальное, допишем его к ответу и удалим из соответствующей части.

`MS3.` Если одна из частей пуста, допишем к ответу другую часть целиком.

`MS4.` В противном случае перейдём к шагу `MS1`.

Заметим, что алгоритм `MS` работает за линейное время от длины массива.

Сортировка слиянием

Идея — алгоритм `M` (MergeSort):

`M1.` Поделим массив на две равные по длине части.

`M2.` Отсортируем рекурсивно левую и правую части.

`M3.` Из двух отсортированных половин получим отсортированный массив.

Как выполнить пункт `M3` — алгоритм `MS` (Merge Segments):

`MS1.` Рассмотрим первые числа левой и правой частей.

`MS2.` Выберем из них минимальное, допишем его к ответу и удалим из соответствующей части.

`MS3.` Если одна из частей пуста, допишем к ответу другую часть целиком.

`MS4.` В противном случае перейдём к шагу `MS1`.

Заметим, что алгоритм `MS` работает за линейное время от длины массива.

Сортировка слиянием

Идея — алгоритм `M` (MergeSort):

`M1.` Поделим массив на две равные по длине части.

`M2.` Отсортируем рекурсивно левую и правую части.

`M3.` Из двух отсортированных половин получим отсортированный массив.

Как выполнить пункт `M3` — алгоритм `MS` (Merge Segments):

`MS1.` Рассмотрим первые числа левой и правой частей.

`MS2.` Выберем из них минимальное, допишем его к ответу и удалим из соответствующей части.

`MS3.` Если одна из частей пуста, допишем к ответу другую часть целиком.

`MS4.` В противном случае перейдём к шагу `MS1`.

Заметим, что алгоритм `MS` работает за линейное время от длины массива.

Сортировка слиянием: код

```
merge_sort (a, l, r):
  if l >= r:
    return
  m = (l + r) / 2
  merge_sort (a, l, m)
  merge_sort (a, m + 1, r)
  merge_segments (a, l, m, r)

merge_segments (a, l, m, r):
  i = l,  j = m + 1,  k = l
  while i < m or j < r:
  if j = r or (i < m and a[i] <= a[j]):
      b[k++] = a[i++]
    else:
      b[k++] = a[j++]
  a[l..r] = b[l..r]
```

Сортировка слиянием: код

```
merge_sort (a, l, r):
  if l >= r:
    return
  m = (l + r) / 2
  merge_sort (a, l, m)
  merge_sort (a, m + 1, r)
  merge_segments (a, l, m, r)

merge_segments (a, l, m, r):
  i = l,  j = m + 1,  k = l
  while i < m or j < r:
  if j = r or (i < m and a[i] <= a[j]):
      b[k++] = a[i++]
    else:
      b[k++] = a[j++]
  a[l..r] = b[l..r]
```

Сортировка слиянием: альтернативный код

```
 M    merge_sort (a, l, r):
       if l >= r:
         return
M1     m = (l + r) / 2
M2     merge_sort (a, l, m)
M2     merge_sort (a, m + 1, r)
       i = l,  j = m + 1,  k = l
MS     while i < m or j < r:
MS1      if j = r or (i < m and a[i] <= a[j]):
MS2        b[k++] = a[i++]
         else:
MS2        b[k++] = a[j++]
MS4    a[l..r] = b[l..r]
```

Сортировка слиянием: анализ

Общие наблюдения:

- На каждом уровне вложенности рекурсии алгоритма `M` отрезки, на которых он запускается, не имеют общих точек.
- Алгоритм `MS` работает за линейное время от длины отрезка.
- Общее время работы — $O(n \cdot d)$, где d — максимальный уровень вложенности рекурсии.

Специфика алгоритма:

- Каждый отрезок делится алгоритмом `MS` поровну.
- Значит, $d = \log_2 n$ и общее время работы — $O(n \log n)$.

Используемая память:

- Заметим, что для массива `b` требуется $O(n)$ дополнительной памяти.

Сортировка слиянием: анализ

Общие наблюдения:

- На каждом уровне вложенности рекурсии алгоритма `M` отрезки, на которых он запускается, не имеют общих точек.
- Алгоритм `MS` работает за линейное время от длины отрезка.
- Общее время работы — $O(n \cdot d)$, где d — максимальный уровень вложенности рекурсии.

Специфика алгоритма:

- Каждый отрезок делится алгоритмом `MS` поровну.
- Значит, $d = \log_2 n$ и общее время работы — $O(n \log n)$.

Используемая память:

- Заметим, что для массива `b` требуется $O(n)$ дополнительной памяти.

Сортировка слиянием: анализ

Общие наблюдения:

- На каждом уровне вложенности рекурсии алгоритма `M` отрезки, на которых он запускается, не имеют общих точек.
- Алгоритм `MS` работает за линейное время от длины отрезка.
- Общее время работы — $O(n \cdot d)$, где d — максимальный уровень вложенности рекурсии.

Специфика алгоритма:

- Каждый отрезок делится алгоритмом `MS` поровну.
- Значит, $d = \log_2 n$ и общее время работы — $O(n \log n)$.

Используемая память:

- Заметим, что для массива `b` требуется $O(n)$ дополнительной памяти.

Сортировка с помощью кучи

Идея — решим задачу в два этапа:

H. Сначала преобразуем массив в двоичную кучу.

HA. Затем из двоичной кучи сделаем отсортированный массив.

Двоичная куча — это массив $a[1..n]$, в котором выполнены соотношения $a[k] \geqslant a[2k]$ и $a[k] \geqslant a[2k+1]$ (свойство кучи) для всех k, для которых существуют соответствующие пары.

Сортировка с помощью кучи

Идея — решим задачу в два этапа:

H. Сначала преобразуем массив в двоичную кучу.

HA. Затем из двоичной кучи сделаем отсортированный массив.

Двоичная куча — это массив $a[1..n]$, в котором выполнены соотношения $a[k] \geqslant a[2k]$ и $a[k] \geqslant a[2k+1]$ (свойство кучи) для всех k, для которых существуют соответствующие пары.

Сортировка с помощью кучи: алгоритм

Алгоритм H (Heapify):

H1. Рассматривая вершины от последней к первой, последовательно добьёмся того, чтобы для рассматриваемой вершины, а также для всех вершин с бо́льшим номером, было выполнено свойство кучи.

Алгоритм HA (HeapToArray):

HA1. Извлечём из кучи наибольший элемент (это всегда элемент с номером 1).

HA2. Поменяем его местами с последним элементом кучи.

HA3. Уменьшим размер кучи на 1, а последний элемент объявим элементом итогового массива.

HA4. Восстановим для первого элемента свойство кучи.

HA5. Если куча ещё не пуста, перейдём к шагу HA1.

Сортировка с помощью кучи: алгоритм

Алгоритм `H` (Heapify):

`H1.` Рассматривая вершины от последней к первой, последовательно добьёмся того, чтобы для рассматриваемой вершины, а также для всех вершин с бóльшим номером, было выполнено свойство кучи.

Алгоритм `HA` (HeapToArray):

`HA1.` Извлечём из кучи наибольший элемент (это всегда элемент с номером 1).

`HA2.` Поменяем его местами с последним элементом кучи.

`HA3.` Уменьшим размер кучи на 1, а последний элемент объявим элементом итогового массива.

`HA4.` Восстановим для первого элемента свойство кучи.

`HA5.` Если куча ещё не пуста, перейдём к шагу `HA1`.

Сортировка с помощью кучи: подзадача

Подзадача для алгоритмов `H` и `HA`:

- Даны массив $a[1..n]$ и номер элемента в нём k.
- Известно, что для всех элементов с большим номером свойство кучи выполнено.
- Требуется сделать так, чтобы оно было выполнено и для $a[k]$.

Решение — алгоритм SD (SiftDown):

`SD1.` Если $2k > n$, свойство кучи выполнено автоматически.

`SD2.` В противном случае выберем из $a[2k]$ и $a[2k+1]$ наибольший элемент x.

`SD3.` Если $a[k] \geqslant x$, свойство кучи выполнено.

`SD4.` Иначе поменяем местами $a[k]$ и x, после чего запустим алгоритм SD для номера элемента x.

Сортировка с помощью кучи: подзадача

Подзадача для алгоритмов `H` и `HA`:

- Даны массив $\mathrm{a}[1..\mathrm{n}]$ и номер элемента в нём k.
- Известно, что для всех элементов с большим номером свойство кучи выполнено.
- Требуется сделать так, чтобы оно было выполнено и для $\mathrm{a}[\mathrm{k}]$.

Решение — алгоритм SD (SiftDown):

SD1. Если $2\mathrm{k} > \mathrm{n}$, свойство кучи выполнено автоматически.

SD2. В противном случае выберем из $\mathrm{a}[2\mathrm{k}]$ и $\mathrm{a}[2\mathrm{k}+1]$ наибольший элемент x.

SD3. Если $\mathrm{a}[\mathrm{k}] \geqslant \mathrm{x}$, свойство кучи выполнено.

SD4. Иначе поменяем местами $\mathrm{a}[\mathrm{k}]$ и x, после чего запустим алгоритм SD для номера элемента x.

Сортировка с помощью кучи: код

```
heapify (a, n):
  for i := n / 2 downto 1:
    sift_down (a, i, n)

sift_down (a, i, n):
  y = a[i]
  while True:
    j = i * 2
    if j > n:
      break
    if j < n and a[j] < a[j + 1]:
      j += 1
    if y >= a[j]:
      break
    a[i] = a[j]
    i = j
  a[i] = y
```

```
heap_to_array (a, n):
  for i := n downto 2:
    swap (a[1], a[i])
    sift_down (a, 1, n)
```

Сортировка с помощью кучи: код

```
heapify (a, n):
  for i := n / 2 downto 1:
    sift_down (a, i, n)

sift_down (a, i, n):
  y = a[i]
  while True:
    j = i * 2
    if j > n:
      break
    if j < n and a[j] < a[j + 1]:
      j += 1
    if y >= a[j]:
      break
    a[i] = a[j]
    i = j
  a[i] = y
```

```
heap_to_array (a, n):
  for i := n downto 2:
    swap (a[1], a[i])
    sift_down (a, 1, n)
```

Сортировка с помощью кучи: код

```
heapify (a, n):
  for i := n / 2 downto 1:
    sift_down (a, i, n)

sift_down (a, i, n):
  y = a[i]
  while True:
    j = i * 2
    if j > n:
      break
    if j < n and a[j] < a[j + 1]:
      j += 1
    if y >= a[j]:
      break
    a[i] = a[j]
    i = j
  a[i] = y
```

```
heap_to_array (a, n):
  for i := n downto 2:
    swap (a[1], a[i])
    sift_down (a, 1, n)
```

Сортировка с помощью кучи: анализ

Общие наблюдения:

- Алгоритм `SD` работает за $O(\log n)$: на каждом шаге номер элемента увеличивается хотя бы вдвое.
- Алгоритм `HA` работает за $O(n \log n)$: он $n-1$ раз вызывает алгоритм `SD` для кучи из n, $n-1$, …, 2 элементов.
- Алгоритм `H` работает за $O(n \log n)$: он $n/2$ раз вызывает алгоритм `SD`.
- Общее время работы — $O(n \log n)$.

На самом деле алгоритм `H` работает за $O(n)$.

Сортировка с помощью кучи: анализ

Общие наблюдения:

- Алгоритм SD работает за $O(\log n)$: на каждом шаге номер элемента увеличивается хотя бы вдвое.
- Алгоритм HA работает за $O(n \log n)$: он $n-1$ раз вызывает алгоритм SD для кучи из n, $n-1$, …, 2 элементов.
- Алгоритм H работает за $O(n \log n)$: он $n/2$ раз вызывает алгоритм SD.
- Общее время работы — $O(n \log n)$.

На самом деле алгоритм H работает за $O(n)$.

Сортировка с помощью кучи: анализ

На самом деле алгоритм `H` работает за $O(n)$.
Подробный анализ алгоритма `H`:

- Элементов кучи, для которых алгоритм `SD` делает много шагов, немного.
- Для $\frac{n}{4}$ элементов с номерами $\frac{n}{2}$, $\frac{n}{2} - 1$, ..., $\frac{n}{4} + 1$ он делает не более одного шага.
- Для $\frac{n}{8}$ элементов с номерами $\frac{n}{4}$, $\frac{n}{4} - 1$, ..., $\frac{n}{8} + 1$ он делает не более двух шагов.
- ...
- Максимальное количество шагов ($\log n$) алгоритм может сделать только для элемента с номером 1.

Сортировка с помощью кучи: анализ

На самом деле алгоритм H работает за $O(n)$.

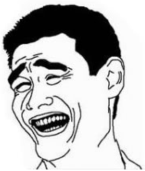
$$
\begin{array}{rcl}
\frac{n}{4} + 2 \cdot \frac{n}{8} + 3 \cdot \frac{n}{16} + \ldots & = & \\
\frac{n}{4} + \frac{n}{8} + \frac{n}{16} + \ldots & + & (\leqslant \frac{n}{2}) \\
\frac{n}{8} + \frac{n}{16} + \ldots & + & (\leqslant \frac{n}{4}) \\
\frac{n}{16} + \ldots & + & (\leqslant \frac{n}{8}) \\
\ldots & \leqslant & \\
\frac{n}{2} + \frac{n}{4} + \frac{n}{8} + \ldots & \leqslant & n
\end{array}
$$

Тем не менее, вся сортировка работает за $O(n \log n)$.

Оглавление

Мотивация

Pascal:	`QSort (a, 1, n)`
C:	`qsort (a, 0, n - 1)`
C++:	`std::sort (a, a + n)`
Java:	`Arrays.sort (a, 0, n)`
C#:	`Array.sort (a, 0, n)`



Можно использовать библиотечную функцию сортировки.
Зачем знать, как она работает?

Мотивация

Различные алгоритмы сортировки, в среднем работающие за время $O(n \log n)$, обладают разными достоинствами и недостатками:

- QuickSort:
  - – в худшем случае работает за $O(n^2)$;
  - + на практике является самым быстрым в среднем случае.
- MergeSort:
  - – требует $O(n)$ дополнительной памяти;
  - + может легко быть модифицирован для параллельных вычислений;
  - + является устойчивым.
- HeapSort:
  - – плохо сочетается с кэшированием;
  - + требует $O(n \log n)$ времени и $O(1)$ дополнительной памяти в худшем случае.

Мотивация

Кроме того, подходы и идеи, использованные в этих сортировках, оказываются полезны и в других задачах:

- QuickSort: нахождение k-й порядковой статистики за $O(n)$.
- MergeSort: подсчёт количества инверсий в перестановке за $O(n \log n)$.
- HeapSort: структура данных, обеспечивающая добавление элемента за $O(\log n)$, поиск максимума за $O(1)$ и удаление максимума за $O(\log n)$.

Порядковая статистика

Постановка задачи:

- Дан массив a размера n и число k $(1 \leqslant k \leqslant n)$.
- Нужно найти k-ю порядковую статистику массива a, то есть элемент, который после сортировки окажется в позиции k.

Идея — алгоритм QS (QuickSelect):

QS1. Выберем один элемент $x = a_t$.

QS2. Поставим x на то место, где он окажется после сортировки; пусть это оказалась позиция m.

QS3. Поставим слева от x все элементы $\leqslant x$, а справа все элементы $\geqslant x$.

QS4. Если $k \leqslant m$, найдём алгоритмом QS k-й элемент на отрезке массива от 1 до m.

QS5. В противном случае найдём алгоритмом QS $(k - m)$-й элемент на отрезке массива от $m + 1$ до n.

Порядковая статистика

Постановка задачи:

- Дан массив a размера n и число k $(1 \leqslant k \leqslant n)$.
- Нужно найти k-ю порядковую статистику массива a, то есть элемент, который после сортировки окажется в позиции k.

Идея — алгоритм `QS` (QuickSelect):

`QS1.` Выберем один элемент $x = a_t$.

`QS2.` Поставим x на то место, где он окажется после сортировки; пусть это оказалась позиция m.

`QS3.` Поставим слева от x все элементы $\leqslant x$, а справа все элементы $\geqslant x$.

`QS4.` Если $k \leqslant m$, найдём алгоритмом `QS` k-й элемент на отрезке массива от 1 до m.

`QS5.` В противном случае найдём алгоритмом `QS` $(k - m)$-й элемент на отрезке массива от $m + 1$ до n.

Порядковая статистика

Как выполнить пункты `QS2` и `QS3` — алгоритм `P` (Partition):

`P1.` Найдём y — самый левый элемент, не меньший x.

`P2.` Найдём z — самый правый элемент, не больший x.

`P3.` Если y стоит левее z, поменяем местами y и z и запустим алгоритм `P` для отрезка массива между ними.

`P4.` В противном случае работа алгоритма `P` завершена.

Заметим, что алгоритм `P` работает за линейное время от длины массива.

Порядковая статистика

Как выполнить пункты `QS2` и `QS3` — алгоритм `P` (Partition):

`P1.` Найдём y — самый левый элемент, не меньший x.

`P2.` Найдём z — самый правый элемент, не больший x.

`P3.` Если y стоит левее z, поменяем местами y и z и запустим алгоритм `P` для отрезка массива между ними.

`P4.` В противном случае работа алгоритма `P` завершена.

Заметим, что алгоритм `P` работает за линейное время от длины массива.

Порядковая статистика: код

```
quick_select (a, k, l, r):
  if l == r:
    return l
  x = a[random (l, r)]
  m = partition (a, l, r, x)
  if k <= m:  return
    quick_select (a, k, l, m)
  else:  return
    quick_select (a, k, m + 1, r)
```

```
partition (a, l, r, x):
  i = l,  j = r
  while i < j:
    while a[i] < x:
      i += 1
    while x < a[j]:
      j -= 1
    if i > j:
      break
    swap (a[i], a[j])
    i += 1,  j -= 1
  return j
```

Порядковая статистика: код

```
quick_select (a, k, l, r):
  if l == r:
    return l
  x = a[random (l, r)]
  m = partition (a, l, r, x)
  if k <= m:  return
    quick_select (a, k, l, m)
  else:  return
    quick_select (a, k, m + 1, r)
```

```
partition (a, l, r, x):
  i = l,  j = r
  while i < j:
    while a[i] < x:
      i += 1
    while x < a[j]:
      j -= 1
    if i > j:
      break
    swap (a[i], a[j])
    i += 1,  j -= 1
  return j
```

Порядковая статистика: альтернативный код

```
QS    quick_select (a, k, l, r):
        while l < r:
QS1       x = a[random (l, r)]
          i = l,  j = r
P         while i < j:
P1          while a[i] < x:  i += 1
P2          while x < a[j]:  j -= 1
P4          if i > j:  break
P3          swap (a[i], a[j])
P3          i += 1,  j -= 1
QS4       if k <= j:
QS4         r = j
QS5       else:
QS5         l = j + 1
        return l
```

Порядковая статистика: альтернативный код

```
QS    quick_select (a, k, l, r):
        while l < r:
QS1       x = a[random (l, r)]
          i = l,  j = r
P         while i < j:
P1          while a[i] < x:  i += 1
P2          while x < a[j]:  j -= 1
P4          if i > j:  break
P3          swap (a[i], a[j])
P3          i += 1,  j -= 1
QS4       if k <= j:
QS4         r = j
QS5       else:
QS5         l = j + 1
        return l
```

Порядковая статистика: анализ

Общие наблюдения:

- Алгоритм `QS` отличается от алгоритма `Q` только тем, что рекурсивно запускается лишь от одного отрезка из двух — того, в котором содержится искомый элемент.
- Алгоритм `P` работает за линейное время от длины отрезка.
- Общее время работы пропорционально суммарной длине всех отрезков, на которых был запущен алгоритм.

Порядковая статистика: анализ

Общие наблюдения:

- Алгоритм `QS` отличается от алгоритма `Q` только тем, что рекурсивно запускается лишь от одного отрезка из двух — того, в котором содержится искомый элемент.
- Алгоритм `P` работает за линейное время от длины отрезка.
- Общее время работы пропорционально суммарной длине всех отрезков, на которых был запущен алгоритм.

Лучший случай:

- Пусть каждый раз алгоритм рекурсивно запускается от меньшей из двух половин.
- Тогда сумма длин рассмотренных отрезков не превосходит $n + \frac{n}{2} + \frac{n}{4} + \ldots \leqslant 2n$, поэтому общее время работы — $O(n)$.
- На практике сложно выбирать x так, чтобы спускаться в меньшую половину.

Порядковая статистика: анализ

Худший случай:

- Пусть каждый отрезок делится алгоритмом P на часть из одного элемента и часть изо всех оставшихся, в которую и нужно затем рекурсивно спускаться.
- Тогда общее время работы — $O(n^2)$.
- Например, так будет, если все числа различны, а в качестве x на каждом отрезке выбирается либо самый маленький, либо самый большой элемент этого отрезка, и при этом найти нужно тот элемент, который будет выбран последним.

Порядковая статистика: анализ

Средний случай:

- Пусть выбор x случаен.
- Тогда с вероятностью $\geqslant \frac{1}{2}$ в каждом отрезке длины n выбирается разделитель, попадающий в позиции $[\frac{1}{4}n; \frac{3}{4}n]$.
- Значит, в среднем каждое второе разделение делит отрезок в отношении не более $3:1$ (бóльшая часть имеет длину $\leqslant \frac{3}{4}n$).
- Поэтому, в какую бы половину мы ни спускались, в среднем за каждые два спуска мы уменьшаем длину текущего отрезка хотя бы на четверть.
- А значит, и общее время работы не превосходит $O(n)$, ведь $2n + 2 \cdot \frac{3}{4}n + 2 \cdot \frac{9}{16}n + \ldots \leqslant 2n \cdot 4$.

Подсчёт количества инверсий

Постановка задачи:

- Дана перестановка a размера n.
- Нужно найти количество пар индексов (i, j) таких, что $i < j$ и $a_i > a_j$.

Идея — алгоритм CI (CountInversions):

CI1. Поделим массив на две равные по длине части.

CI2. Отсортируем рекурсивно левую и правую части и решим задачу для них.

CI3. Из двух отсортированных половин получим отсортированный массив, попутно получив ответ в нашей задаче.

Подсчёт количества инверсий

Постановка задачи:

- Дана перестановка a размера n.
- Нужно найти количество пар индексов (i, j) таких, что $i < j$ и $a_i > a_j$.

Идея — алгоритм `CI` (CountInversions):

`CI1.` Поделим массив на две равные по длине части.

`CI2.` Отсортируем рекурсивно левую и правую части и решим задачу для них.

`CI3.` Из двух отсортированных половин получим отсортированный массив, попутно получив ответ в нашей задаче.

Подсчёт количества инверсий

Идея — алгоритм `CI` (CountInversions):

`CI1.` Поделим массив на две равные по длине части.

`CI2.` Отсортируем рекурсивно левую и правую части и решим задачу для них.

`CI3.` Из двух отсортированных половин получим отсортированный массив, попутно получив ответ в нашей задаче.

Как выполнить пункт `CI3` — алгоритм `MC` (Merge And Count):

`MC1.` Рассмотрим первые числа левой и правой частей.

`MC2.` Выберем из них минимальное, допишем его к ответу и удалим из соответствующей части.

`MC3.` В случае, если меньшее число — из второй части, добавим к ответу количество чисел, оставшихся в первой части: ведь все они больше текущего числа, но в исходном массиве стоят левее.

`MC4.` Если хотя бы одна из частей непуста, перейдём к шагу `MC1`.

Заметим, что алгоритм `MC` работает за линейное время от длины массива.

Подсчёт количества инверсий

Идея — алгоритм `CI` (CountInversions):

`CI1.` Поделим массив на две равные по длине части.

`CI2.` Отсортируем рекурсивно левую и правую части и решим задачу для них.

`CI3.` Из двух отсортированных половин получим отсортированный массив, попутно получив ответ в нашей задаче.

Как выполнить пункт `CI3` — алгоритм `MC` (Merge And Count):

`MC1.` Рассмотрим первые числа левой и правой частей.

`MC2.` Выберем из них минимальное, допишем его к ответу и удалим из соответствующей части.

`MC3.` В случае, если меньшее число — из второй части, добавим к ответу количество чисел, оставшихся в первой части: ведь все они больше текущего числа, но в исходном массиве стоят левее.

`MC4.` Если хотя бы одна из частей непуста, перейдём к шагу `MC1`.

Заметим, что алгоритм `MC` работает за линейное время от длины массива.

Подсчёт количества инверсий: код

```
count_inversions (a, l, r):
  if l >= r:  return 0
  m = (l + r) / 2
  res  = count_inversions (a, l, m)
  res += count_inversions (a, m + 1, r)
  res += merge_and_count (a, l, m, r)
  return res

merge_and_count (a, l, m, r):
  i = l,  j = m + 1,  k = l,  res = 0
  while i < m or j < r:
  if j = r or (i < m and a[i] < a[j]):  b[k++] = a[i++]
  else:                      res += m - i,  b[k++] = a[j++]
  a[l..r] = b[l..r]
  return res
```

Подсчёт количества инверсий: код

```
count_inversions (a, l, r):
  if l >= r:  return 0
  m = (l + r) / 2
  res  = count_inversions (a, l, m)
  res += count_inversions (a, m + 1, r)
  res += merge_and_count (a, l, m, r)
  return res

merge_and_count (a, l, m, r):
  i = l,  j = m + 1,  k = l,  res = 0
  while i < m or j < r:
  if j = r or (i < m and a[i] < a[j]):  b[k++] = a[i++]
  else:                     res += m - i,  b[k++] = a[j++]
  a[l..r] = b[l..r]
  return res
```

Подсчёт количества инверсий: альтернативный код

```
CI    count_inversions (a, l, r):
        if l >= r:
          return 0
CI1     m = (l + r) / 2
CI2     res  = count_inversions (a, l, m)
CI2     res += count_inversions (a, m + 1, r)
        i = l,  j = m + 1,  k = l
MC      while i < m or j < r:
MC1     if j = r or (i < m and a[i] < a[j]):
MC2       b[k++] = a[i++]
        else:
MC3       res += m - i
MC2       b[k++] = a[j++]
        a[l..r] = b[l..r]
        return res
```

Подсчёт количества инверсий: альтернативный код

```
CI    count_inversions (a, l, r):
        if l >= r:
          return 0
CI1     m = (l + r) / 2
CI2     res  = count_inversions (a, l, m)
CI2     res += count_inversions (a, m + 1, r)
        i = l,  j = m + 1,  k = l
MC      while i < m or j < r:
MC1     if j = r or (i < m and a[i] < a[j]):
MC2       b[k++] = a[i++]
        else:
MC3       res += m - i
MC2       b[k++] = a[j++]
        a[l..r] = b[l..r]
        return res
```

Подсчёт количества инверсий: анализ

Общие наблюдения:

- Алгоритм `CI` отличается от алгоритма `M` только тем, что дополнительно вычисляет ответ на задачу.
- На каждом уровне вложенности рекурсии алгоритма `CI` отрезки, на которых он запускается, не имеют общих точек.
- Алгоритм `MC` работает за линейное время от длины отрезка.
- Общее время работы — $O(n \cdot d)$, где d — максимальный уровень вложенности рекурсии.

Специфика алгоритма:

- Каждый отрезок делится алгоритмом `MC` поровну.
- Значит, $d = \log_2 n$ и общее время работы — $O(n \log n)$.

Используемая память:

- Заметим, что для массива `b` требуется $O(n)$ дополнительной памяти.

Подсчёт количества инверсий: анализ

Общие наблюдения:

- Алгоритм `CI` отличается от алгоритма `M` только тем, что дополнительно вычисляет ответ на задачу.
- На каждом уровне вложенности рекурсии алгоритма `CI` отрезки, на которых он запускается, не имеют общих точек.
- Алгоритм `MC` работает за линейное время от длины отрезка.
- Общее время работы — $O(n \cdot d)$, где d — максимальный уровень вложенности рекурсии.

Специфика алгоритма:

- Каждый отрезок делится алгоритмом `MC` поровну.
- Значит, $d = \log_2 n$ и общее время работы — $O(n \log n)$.

Используемая память:

- Заметим, что для массива `b` требуется $O(n)$ дополнительной памяти.

Подсчёт количества инверсий: анализ

Общие наблюдения:

- Алгоритм `CI` отличается от алгоритма `M` только тем, что дополнительно вычисляет ответ на задачу.
- На каждом уровне вложенности рекурсии алгоритма `CI` отрезки, на которых он запускается, не имеют общих точек.
- Алгоритм `MC` работает за линейное время от длины отрезка.
- Общее время работы — $O(n \cdot d)$, где d — максимальный уровень вложенности рекурсии.

Специфика алгоритма:

- Каждый отрезок делится алгоритмом `MC` поровну.
- Значит, $d = \log_2 n$ и общее время работы — $O(n \log n)$.

Используемая память:

- Заметим, что для массива `b` требуется $O(n)$ дополнительной памяти.

Двоичная куча

Постановка задачи — реализовать структуру данных, поддерживающую следующие операции:

- Добавление элемента за время $O(\log n)$.
- Поиск максимума за время $O(1)$.
- Удаление максимума за время $O(\log n)$.

Двоичная куча — это массив a[1..n], в котором выполнены соотношения $a[k] \geqslant a[2k]$ и $a[k] \geqslant a[2k+1]$ (свойство кучи) для всех k, для которых существуют соответствующие пары.

Двоичная куча

Постановка задачи — реализовать структуру данных, поддерживающую следующие операции:

- Добавление элемента за время $O(\log n)$.
- Поиск максимума за время $O(1)$.
- Удаление максимума за время $O(\log n)$.

Двоичная куча — это массив $\mathtt{a[1..n]}$, в котором выполнены соотношения $\mathtt{a[k]} \geqslant \mathtt{a[2k]}$ и $\mathtt{a[k]} \geqslant \mathtt{a[2k+1]}$ (свойство кучи) для всех $\mathtt{k}$, для которых существуют соответствующие пары.

Двоичная куча: алгоритмы

- При добавлении элемента увеличиваем размер кучи на единицу и дописываем новый элемент в конец. После этого свойство кучи выполнено для всех элементов, кроме, может быть, последнего.
- При поиске максимума просто возвращаем элемент массива a[1].
- При удалении максимума уменьшаем размер кучи на единицу и на место a[1] записываем a[n], где n — размер кучи до удаления. После этого свойство кучи выполнено для всех элементов, кроме, может быть, первого.

Двоичная куча: подзадача

Подзадача, возникающая при добавлении и удалении элемента:

- Даны массив $\mathtt{a}[1..\mathtt{n}]$ и номер элемента в нём $\mathtt{k}$.
- Известно, что для всех элементов, кроме $\mathtt{a}[\mathtt{k}]$, свойство кучи выполнено.
- Требуется сделать так, чтобы оно было выполнено и для $\mathtt{a}[\mathtt{k}]$.

Двоичная куча: подзадача

Подзадача, возникающая при добавлении и удалении элемента:

- Даны массив $\mathtt{a[1..n]}$ и номер элемента в нём $\mathtt{k}$.
- Известно, что для всех элементов, кроме $\mathtt{a[k]}$, свойство кучи выполнено.
- Требуется сделать так, чтобы оно было выполнено и для $\mathtt{a[k]}$.

Решение при $k = 1$ — алгоритм SD (SiftDown):

SD1. Если $\mathtt{2k > n}$, свойство кучи выполнено автоматически.

SD2. В противном случае выберем из $\mathtt{a[2k]}$ и $\mathtt{a[2k+1]}$ наибольший элемент $\mathtt{x}$.

SD3. Если $\mathtt{a[k]} \geqslant \mathtt{x}$, свойство кучи выполнено.

SD4. Иначе поменяем местами $\mathtt{a[k]}$ и $\mathtt{x}$, после чего запустим алгоритм SD для номера элемента $\mathtt{x}$.

Двоичная куча: подзадача

Подзадача, возникающая при добавлении и удалении элемента:

- Даны массив $\mathtt{a[1..n]}$ и номер элемента в нём $\mathtt{k}$.
- Известно, что для всех элементов, кроме $\mathtt{a[k]}$, свойство кучи выполнено.
- Требуется сделать так, чтобы оно было выполнено и для $\mathtt{a[k]}$.

Решение при $k = n$ — алгоритм SU (SiftUp):

SU1. Если $\mathtt{k} = 1$, свойство кучи выполнено автоматически.

SU2. Если $\mathtt{a[k/2]} \geqslant \mathtt{a[k]}$, свойство кучи также выполнено.

SU3. Иначе поменяем местами $\mathtt{a[k/2]}$ и $\mathtt{a[k]}$, после чего запустим алгоритм SU для $k/2$.

Двоичная куча: код интерфейса

```
insert (a, n, x):
  n += 1
  a[n] = x
  sift_up (a, n, n)

get_max (a, n):
  return a[1]

remove_max (a, n):
  a[1] = a[n]
  n -= 1
  sift_down (a, 1, n)
```

Двоичная куча: код интерфейса

```
insert (a, n, x):
  n += 1
  a[n] = x
  sift_up (a, n, n)

get_max (a, n):
  return a[1]

remove_max (a, n):
  a[1] = a[n]
  n -= 1
  sift_down (a, 1, n)
```

Двоичная куча: код интерфейса

```
insert (a, n, x):
  n += 1
  a[n] = x
  sift_up (a, n, n)

get_max (a, n):
  return a[1]

remove_max (a, n):
  a[1] = a[n]
  n -= 1
  sift_down (a, 1, n)
```

Двоичная куча: код реализации

```
sift_up (a, i, n):
  y = a[i]
  while i > 1:
    j = i / 2
    if a[j] >= a[i]:
      break
    a[i] = a[j]
    i = j
  a[i] = y
```

```
sift_down (a, i, n):
  y = a[i]
  while True:
    j = i * 2
    if j > n:
      break
    if j < n and a[j] < a[j + 1]:
      j += 1
    if y >= a[j]:
      break
    a[i] = a[j]
    i = j
  a[i] = y
```

Двоичная куча: код реализации

```
sift_up (a, i, n):
  y = a[i]
  while i > 1:
    j = i / 2
    if a[j] >= a[i]:
      break
    a[i] = a[j]
    i = j
  a[i] = y
```

```
sift_down (a, i, n):
  y = a[i]
  while True:
    j = i * 2
    if j > n:
      break
    if j < n and a[j] < a[j + 1]:
      j += 1
    if y >= a[j]:
      break
    a[i] = a[j]
    i = j
  a[i] = y
```

Двоичная куча: анализ

Общие наблюдения:

- Алгоритм `SU` работает за $O(\log n)$: на каждом шаге номер элемента уменьшается хотя бы вдвое.
- Алгоритм `SD` работает за $O(\log n)$: на каждом шаге номер элемента увеличивается хотя бы вдвое.

Всё.