Задача 1.

Рассмотрим следующий алгоритм обработки массива A из $n \geqslant 2$ различных целых чисел:

```
for i := 1 to n do
  for j := 1 to n do
    if A[i] > A[j] then begin
      A[i] := A[i] xor A[j];
      A[j] := A[j] xor A[i];
      A[i] := A[i] xor A[j];
    end;
```

а) Что делает этот алгоритм?

б) Каково минимальное и максимальное количество присваиваний элементам массива A, которое может произойти при выполнении этого алгоритма при фиксированном значении n?

в) Приведите пример алгоритма, который делает то же самое заведомо за меньшее количество присваиваний для каждых n и A.

Задача 2.

Дан набор A из n целых чисел. Необходимо переставить их таким образом, чтобы сумма произведений $S = A_{P_1} \cdot A_{P_2} + A_{P_2} \cdot A_{P_3} + A_{P_3} \cdot A_{P_4} + \ldots + A_{P_{n-1}} \cdot A_{P_n}$ оказалась как можно больше; $P_1, P_2, \ldots, P_n$ — это искомая перестановка чисел от 1 до n.

а) Изучим следующие два алгоритма решения этой задачи:

1. Начнём с произвольной перестановки P. Несколько раз повторим следующую операцию: запомним старое значение суммы S_{old}, слуйайным образом выберем два различных элемента P, поменяем их местами и вычислим новое значение суммы S_{new}; теперь, если $S_{new} <= S_{old}$, то вернём только что переставленные элементы обратно.

2. Начнём с произвольной перестановки P. Зафиксируем целое число $T > 0$. Несколько раз повторим следующую операцию: запомним старое значение суммы S_{old}, случайным образом выберем два различных элемента P, поменяем их местами и вычислим новое значение суммы S_{new}; теперь, если $S_{new} <= S_{old} - T$, то вернём только что переставленные элементы обратно.

В чём достоинства и недостатки этих алгоритмов?

б) Как бы вы решали эту задачу?

Задача 3.

Определим по индукции множество $\mathcal{R}$ *правильных скобочных последовательностей*:

$\varepsilon \in \mathcal{R}$ (пустая строка)

$S \in \mathcal{R} \Rightarrow (S) \in \mathcal{R}$

$S \in \mathcal{R} \Rightarrow [S] \in \mathcal{R}$

$S \in \mathcal{R}, T \in \mathcal{R} \Rightarrow ST \in \mathcal{R}$

Пусть теперь $\mathcal{R}_n$ — это множество правильных скобочных последовательностей из $2n$ символов — n открывающих и n закрывающих скобок.

а) Сколько элементов во множестве $\mathcal{R}_n$?

б) Упорядочим элементы множества $\mathcal{R}_n$ лексикографически с таким порядком символов: ‘(’ $<$ ‘)’ $<$ ‘[’ $<$ ‘]’. Как по данным целым числам n и k найти k-ый в этом порядке элемент множества $\mathcal{R}_n$?