

## Содержание

<b>Обязательные задачи</b>	<b>3</b>
Задача 28А. Умножение многочленов [0.4 sec, 256 mb]	3
Задача 28В. Деление многочленов [0.4 sec, 256 mb]	4
Задача 28С. Умножение чисел [1 sec, 256 mb]	5
Задача 28D. Раздвоение [1.2 sec, 256 mb]	6
Задача 28Е. Дуэль [1 sec, 256 mb]	7
<b>Бонус</b>	<b>8</b>
Задача 28F. Длинный наибольший общий делитель [6 sec, 256 mb]	8
Задача 28G. Умножение четырех чисел [1 sec, 256 mb]	9
Задача 28H. Уравнение [6 sec, 256 mb]	10
Задача 28I. AVL-деревья [0.4 sec, 256 mb]	11
Задача 28J. ДНК роботов [1 sec, 256 mb]	12

---

### Пример работы с файлами.

Если вы не умеете читать/выводить данные, или открывать файлы, воспользуйтесь примерами. <http://acm.math.spbu.ru/~sk1/algo/sum/>

### Пример работы с файлами.

В некоторых задачах большой ввод и вывод. Про ввод-вывод в C++:

[http://acm.math.spbu.ru/~sk1/algo/input-output/cpp\\_common.html](http://acm.math.spbu.ru/~sk1/algo/input-output/cpp_common.html)

Имеет смысл пользоваться супер быстрым вводом-выводом. Две версии:

[http://acm.math.spbu.ru/~sk1/algo/input-output/io\\_export.cpp.html](http://acm.math.spbu.ru/~sk1/algo/input-output/io_export.cpp.html)

[http://acm.math.spbu.ru/~sk1/algo/input-output/fread\\_write\\_export.cpp.html](http://acm.math.spbu.ru/~sk1/algo/input-output/fread_write_export.cpp.html)

### Выделение памяти.

В некоторых задачах нужен STL, который активно использует динамическую память (set-ы, map-ы) переопределение стандартного аллокатора ускорит вашу программу:

<http://acm.math.spbu.ru/~sk1/algo/memory.cpp.html>

## Обязательные задачи

### Задача 28А. Умножение многочленов [0.4 сек, 256 mb]

Даны многочлены  $P(x)$  и  $Q(x)$ , найдите  $P(x)Q(x)$ .  $Q(x) = x^k - 1$ .  
У  $P(x)$  все коэффициенты — случайные целые числа от 0 до  $m - 1$ .  
Все вычисления происходят по модулю  $m$ ,  $m$  — простое от 2 до  $10^9 + 7$ .

#### Формат входных данных

Первая строка содержит целые числа  $n, k, m$ .  
Следующая строка содержит  $n$  чисел  $p_0, p_1, \dots, p_{n-1}$ ,  $P(x) = \sum p_i x^i$ .

#### Формат выходных данных

Выведите  $n + k$  целых чисел от 0 до  $m - 1$ :  $b_0, b_1, \dots, b_{n+k-1}$ ,  
такие, что  $P(x)Q(x) = \sum b_i x^i \pmod m$ .  
 $n, k \leq 10^5$ .

#### Примеры

mulp.in	mulp.out
4 1 7 1 2 3 4	6 6 6 6 4

#### Замечание

Предельно простая задача.

**Задача 28В. Деление многочленов [0.4 сек, 256 mb]**

Даны многочлены  $P(x)$  и  $Q(x)$ , найдите такие  $A(x)$  и  $R(x)$ , что  $P(x) = A(x)Q(x) + R(x)$  и  $\deg R < \deg Q$ .  $Q(x) = x^k - 1$ . У  $P(x)$  все коэффициенты — случайные целые числа от 0 до  $m - 1$ . Все вычисления происходят по модулю  $m$ ,  $m$  — простое от 2 до  $10^9 + 7$ .

**Формат входных данных**

Первая строка содержит целые числа  $n, k, m$ .

Следующая строка содержит  $n$  чисел  $p_0, p_1, \dots, p_{n-1}$ ,  $P(x) = \sum p_i x^i$ .

**Формат выходных данных**

На первой строке выведите  $t = \max(n - k, 1)$  целых чисел от 0 до  $m - 1$ :  $a_0, a_1, \dots, a_{t-1}$ . На второй строке  $k$  целых чисел от 0 до  $m - 1$ :  $r_0, r_1, \dots, r_{k-1}$ . Все эти числа должны обладать свойством, что  $P(x) = Q(x)(\sum a_i x^i) + \sum r_i x^i \pmod m$ .

$n, k \leq 10^5$ .

**Примеры**

divp.in	divp.out
3 1 7 1 5 1	6 1 0
3 1 7 2 4 1	5 1 0
3 1 7 0 4 1	5 1 5

**Замечание**

Предельно простая задача.

**Задача 28С. Умножение чисел [1 сек, 256 mb]**

Требуется перемножить два целых неотрицательных числа.

**Формат входных данных**

В двух строках даны два целых неотрицательных числа в 10-чной системе счисления. Максимальная длина числа =  $2^{18}$ .

**Формат выходных данных**

Выведите в выходной файл произведение.

**Пример**

mul.in	mul.out
13	1300
100	

**Замечание**

Это задача, в которой должно заходить FFT вообще без оптимизаций.  
Система счисления –  $10^2$  или  $10^4$ .

### Задача 28D. Раздвоение [1.2 sec, 256 mb]

Обозначим две последовательности действительных чисел  $x(k)$  и  $y(k)$ . Определим последовательность комплексных чисел  $z(k)$ :  $z(k) = x(k) + iy(k)$ .

$$\text{Пусть } FFT_N(k, z) = \sum_{n=0}^{N-1} z_n e^{2\pi i kn/N}.$$

Аналогичным образом определяются  $FFT_N(k, x)$  и  $FFT_N(k, y)$ .

Требуется по вычисленным значениям  $FFT_N(k, z)$

восстановить значения  $FFT_N(k, x)$  и  $FFT_N(k, y)$ .

#### Формат входных данных

В первой строке входного файла записано целое число  $N$  ( $1 \leq N \leq 2^{30}$ ,  $N$  является степенью двойки). Далее следуют целые неотрицательные числа  $A, B, C, D, E, F$ , не превосходящие 1000. Для экономии времени ввода значения  $FFT_N(k, z)$  нужно будет вычислять по следующим формулам:

$$FFT_N(k, z).real = ((A + B \cdot k) \text{ xor } (C \cdot k)) \cdot 10^{-3},$$

$$FFT_N(k, z).imag = ((D + E \cdot k) \text{ xor } (F \cdot k)) \cdot 10^{-3},$$

где  $FFT_N(k, z).real$  и  $FFT_N(k, z).imag$  — действительная и мнимая части соответственно.

Затем дано число  $M$  — количество запросов ( $1 \leq M \leq 10^5$ ). Далее следуют  $M$  целых чисел  $q_j$  ( $0 \leq q_j < N$ ).

#### Формат выходных данных

В выходной файл выведите  $M$  строк. В  $j$ -ой строке — значения  $FFT_N(q_j, x)$  и  $FFT_N(q_j, y)$ . Значения должны отличаться от правильных не более, чем на  $10^{-4}$ .

#### Примеры

real.in	real.out
2 1000 0 0 0 0 0	1.0 0.0 0.0 0.0 1.0 0.0 0.0 0.0
2 0 1	
4 0 100 300 500 100 200	0.000 0.000 0.500 0.000 0.504 0.140 0.516 0.176
4 0 1 2 3	0.656 0.000 0.812 0.000 0.504 -0.140 0.516 -0.176
1048576 999 998 997 996 995 994	540.737 -1587.741 1589.778 539.689 2404.809 531.421 1359.578 1569.751
3 17 239239 2011	3678.277 -523.243 526.382 3664.887

#### Замечание

Разобрана на лекции.

### Задача 28Е. Дуэль [1 sec, 256 mb]

Двое дуэлянтов решили выбрать в качестве места проведения поединка тёмную аллею. Вдоль этой аллеи растёт  $n$  деревьев и кустов. Расстояние между соседними объектами равно одному метру. Дуэль решили проводить по следующим правилам. Некоторое дерево выбирается в качестве стартовой точки. Затем два дерева, находящихся на одинаковом расстоянии от исходного, отмечаются как места для стрельбы. Дуэлянты начинают движение от стартовой точки в противоположных направлениях. Когда соперники достигают отмеченных деревьев, они разворачиваются и начинают стрелять друг в друга.

Дана схема расположения деревьев вдоль аллеи. Требуется определить количество способов выбрать стартовую точку и места для стрельбы согласно правилам дуэли.

#### Формат входных данных

Во входном файле содержится одна строка, состоящая из символов '0' и '1' — схема аллеи. Деревья обозначаются символом '1', кусты — символом '0'. Длина строки не превосходит 100 000 символов.

#### Формат выходных данных

Выведите количество способов выбрать стартовую точку и места для стрельбы согласно правилам дуэли.

#### Примеры

duel.in	duel.out
101010101	4
101001	0

В первом примере возможны следующие конфигурации дуэли (стартовое дерево и деревья для стрельбы выделены жирным шрифтом): **101010101**, **101010101**, **101010101** и **101010101**.

#### Замечание

Задача с практики.

## Бонус

### Задача 28F. Длинный наибольший общий делитель [6 sec, 256 mb]

Даны два целых положительных числа. Найти их наибольший общий делитель.

#### Формат входных данных

Мультитест. Каждый тест задаётся двумя строками. Суммарная длина чисел до 50 000.

#### Формат выходных данных

Для каждого теста выведите одну строку – наибольший общий делитель.

#### Примеры

agcd.in	agcd.out
10	5
15	262144
10000000000000000000	1
1152921504606846976	
17	
100	

#### Подсказка по решению

Пусть система счисления равна  $10^k$ .

Тогда решение за  $O(\frac{n^2}{k^2})$  найдёт по времени.



**Задача 28G. Умножение четырех чисел [1 sec, 256 mb]**

Требуется перемножить четыре целых положительных числа.

**Формат входных данных**

В четырех строках даны четыре целых положительных числа в десятичной системе счисления. Числа даны без ведущих нулей. Суммарная длина всех чисел не превосходит  $2^{20}$  цифр.

**Формат выходных данных**

Выведите в выходной файл произведение данных чисел.

**Пример**

mul3.in	mul3.out
13	13000
100	
5	
2	

**Замечание**

Решение жюри на C++ работает 0.204 секунды.

**Задача 28Н. Уравнение [6 сек, 256 mb]**

Дано уравнение вида  $X^N + Y^N \equiv Z^N \pmod{M}$ .

Требуется для фиксированных  $N$  и  $M$  найти количество различных решений этого уравнения. Решением назовём такую тройку натуральных чисел  $(X, Y, Z)$ , что выполняется:

- $1 \leq X \leq Y < M$
- $1 \leq Z < M$
- $X^N + Y^N \equiv Z^N \pmod{M}$

**Формат входных данных**

В единственной строке входного файла записаны числа  $N$  и  $M$  ( $1 \leq N \leq 7^7, 1 \leq M \leq 7^7$ ).

**Формат выходных данных**

В выходной файл выведите одно число — ответ на задачу.

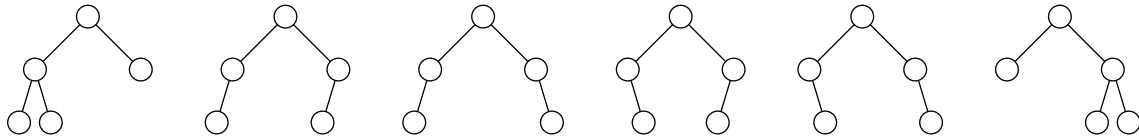
**Примеры**

equation.in	equation.out
1 3	2
2 4	5
3 5	8

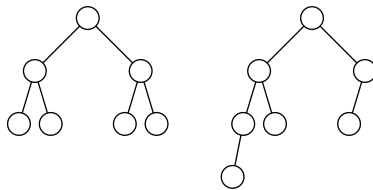
### Задача 28I. AVL-деревья [0.4 sec, 256 mb]

AVL-дерево — сбалансированное по высоте двоичное дерево поиска: для каждой его вершины высота её двух поддеревьев различается не более чем на 1. AVL-деревья названы по первым буквам фамилий их изобретателей, Г. М. Адельсона-Вельского и Е. М. Ландиса.

Для фиксированного количества вершин может существовать несколько AVL-деревьев. Например, существует шесть AVL-деревьев, состоящих из пяти вершин.



Также деревья с одинаковым количеством вершин могут иметь различную высоту. Например, существуют деревья из семи вершин с высотами 2 и 3 соответственно.



Требуется по заданным  $n$  и  $h$  найти количество AVL-деревьев, состоящих из  $n$  вершин и имеющих высоту  $h$ . Так как ответ может быть очень большим, требуется найти остаток от деления искомого количества на 786433.

#### Формат входных данных

Во входном файле даны числа  $n$  и  $h$  ( $1 \leq n \leq 65535$ ,  $0 \leq h \leq 15$ ).

#### Формат выходных данных

Выведите одно число — остаток от деления количества AVL-деревьев, состоящих из  $n$  вершин и имеющих высоту  $h$ , на 786433.

#### Пример

av1.in	av1.out
7 3	16

#### Замечание

786433 — простое число,  $786433 = 3 \cdot 2^{18} + 1$ .

Учимся писать “FFT по модулю”. В авторском решении Фурье вызывается 1 раз.

### Задача 28J. ДНК роботов [1 sec, 256 mb]

Последние достижения в технологии синтеза ДНК позволили провести эксперимент по созданию биороботов.

Для облегчения задачи создания ПО для управления роботами было принято решение, что их ДНК будет состоять из  $M = 2^n$  символов для некоторого  $n \geq 2$ . Кроме этого, по техническим причинам это будет не обычная строка, а циклическая, то есть её можно начинать читать с любой позиции.

Одной из целей эксперимента является изучение мутаций биороботов. В результате продолжительных наблюдений было найдено много различных видов роботов. Для понимания процесса мутации учёным необходимо решить следующую задачу. Для ДНК двух роботов требуется определить коэффициент их похожести. Он вычисляется, как максимальное количество совпадающих символов при наилучшем совмещении этих ДНК. Чем больше символов совпадает, тем лучше совмещение.

Требуется написать программу, которая найдёт наилучшее совмещение двух ДНК.

#### Формат входных данных

В первой строке входного файла записано одно число  $M$  ( $4 \leq M \leq 2^{17}$ ). В следующих двух строках записаны ДНК двух роботов. Обе ДНК — строки, состоящие ровно из  $M$  символов из множества {'A', 'C', 'G', 'T'}.

#### Формат выходных данных

В выходной файл выведите два числа — максимальное количество совпадающих символов и значение оптимального сдвига — неотрицательное количество символов второй ДНК, которые необходимо перенести из конца строки в её начало для достижения наилучшего совмещения.

#### Пример

robots.in	robots.out
16 ACGTACGTACGTACGT CGTACGTACGTACGTC	15 1

#### Замечание

В авторском решении Фурье вызывается 5 раз.