Конспект лекций

Уравнения математической физики

матобес, 6-й семестр, 2017/18 учебный год

Степанов Е.О. (конспект — Олег Евсеев)

6 мая 2018 г.

Эта страница намеренно оставлена пустой.

Содержание

17 февраля 2018 г.

Введение. Организационные моменты

! Лектор — Степанов Евгений Олегович.

> Вроде как считается, что на матмехе чуть больше уровень математической подготовки, и в этом должен быть ваш плюс.

Курс в основном посвящен решению дифференциальных уравнений в частных производных и скорее всего так и должен называться — «Уравнения в частных производных». Текущее название — «Уравнения математической физики» — по большей части обусловлено историческими причинами.

Материал курса разбит на две главы — первая посвящена классическим результатам математической физики, в то время как вторая является концептуально более свежей и посвящена обобщенным решениям (в основном — решению задачи Дирихле для уравнения Пуассона и необходимым для этого средствам).

Устройство курса

Обычный экзамен. Коллоквиума не будет; на 5 нужно сдать еще и задачу. Две («реально легкие») теоретические к/р, гарантирующие автомат (3 или 4) при нужном количестве баллов. Чтобы сдать на 5, нужно сдавать экзамен.

Необходимые знания

- Анализ вещественной переменной;
- Основные определения топологии;
- Мера Лебега и интеграл Лебега. Базовые определения:
  - $\Omega \in \mathbb{R}^n$ — область ($\equiv$ открытое множество),
  - $L^1(\Omega)$ — класс функций, измеримых по Лебегу,
  - $L^p(\Omega) \coloneqq \{u\colon \int_\Omega |u(x)|^p \mathrm{d}x < +\infty\}$,
  - $L^\infty(\Omega) \coloneqq \{u\colon \exists C > 0\colon |u(x)| \leqslant c$ почти всюду$\}$;
- «Неплохо бы уметь интегрировать по частям»;
- «Теорема Фубини и что-то еще примерно оттуда же»;
- Умение работать с частными производными.

1 Уравнения в частных производных

В данной главе будут рассматриваться в основном классические результаты математической физики, многие которых получены еще в XIX веке и ранее.

1.1 Транспортное уравнение и уравнение диффузии

1.1.1 Модель распространения загрязнения

Прежде, чем говорить непосредственно о решении каких-либо уравнений, мы рассмотрим одну классическую модель. Пусть у нас имеется пятно воды в реке. Для простоты представим, что река у нас одномерная, а пятно представляет собой отрезок в $\mathbb{R}$. Будем считать, что река течет со скоростью v.

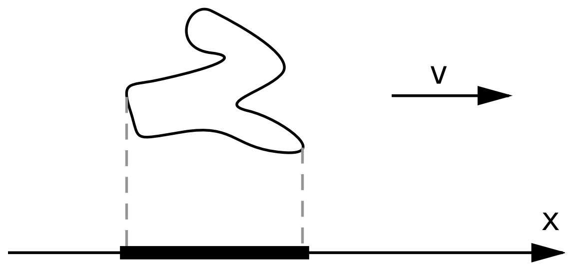

Рис. 1: Иллюстрация модели

Если мы возьмем отрезок $[x, x+\Delta x]$, то общая масса вещества, заключенного в нем, будет равна:

$$\int_x^{x+\Delta x} c(t,\xi)\mathrm{d}\xi$$

где $c(t,x)$ — концентрация вещества в точке x в момент времени t.

Обозначим поток вещества, проходящего через точку x *направо*, через $q(t,x)$. Полагая, что $c(t,x)$ подчиняется закону сохранения массы (то есть, что все изменения массы приходят и уходят через границы отрезка), будем считать справедливым следующее:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_x^{x+\Delta x} c(t,\xi)\mathrm{d}\xi = -q(t,x+\Delta x) + q(t,x)$$

Отсюда:

$$\frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} \frac{\partial c}{\partial t}(t,\xi)\mathrm{d}\xi = \frac{q(t,x) - q(t,x+\Delta x)}{\Delta x}$$

Устремляя $\Delta x \to 0$ (мы можем сделать это в случае, если функции гладкие), получаем следующий закон:

$$\frac{\partial c}{\partial t}(t,x) = -\frac{\partial q}{\partial x}(t,x)$$

Вообще говоря, от чего у нас может зависеть поток через границы? Возможно три случая: либо происходит диффузия вещества в воде, либо снос вещества жидкостью, либо и то, и другое вместе.

Случай диффузии. В случае, когда мы имеем дело с диффузией, поток зависит от градиента концентрации: вещество за счет броуновского движения распространяется оттуда, где его больше, туда, где его меньше. Если записать это в в виде дифференциального закона, получим следующее:

$$q(t,x) = k\frac{\partial c}{\partial x}(t,x)$$

где $k = -D$, $D > 0$ — *коэффициент диффузии (коэффициент Дарси)*.

Дифференцируя еще раз по x, получаем *уравнение диффузии* (оно же *уравнение теплопроводности*):

$$\boxed{\frac{\partial c}{\partial t}(t,x) = D\frac{\partial^2 c}{\partial x \partial x}(t,x)} \tag{1}$$

Случай конвекции. Возможен следующий случай: диффузии нет (чистый снос материала жидкостью). Тогда поток через границу очевидным образом зависит от скорости течения и концентрации вещества:

$$q(t,x) = vc(t,x)$$

Дифференцируя по t, получаем *транспортное уравнение* (оно же *закон сохранения массы при конвекции* или *уравнение переноса*):

$$\boxed{\frac{\partial c}{\partial t}(t,x) = -v\frac{\partial c}{\partial x}(t,x)} \tag{2}$$

Это линейное уравнение 2-го порядка.

Общий случай. Возможен и третий случай (диффузия + конвекция). Тогда мы можем просто просуммировать факторы, влияющие на величину потока:

$$q(t,x) = -D\frac{\partial c}{\partial x}(t,x) + vc(t,x)$$

Отсюда дифференцированием по t можно вывести *уравнение диффузии с конвективным членом*:

$$\boxed{\frac{\partial c}{\partial t} = D\frac{\partial^2 c}{\partial x \partial x}(t,x) - v\frac{\partial c}{\partial x}(t,x)} \tag{3}$$

1.1.2 Решение однородного транспортного уравнения

Пусть нам требуется найти решения уравнения (2) с некоторыми начальными условиями. Поставим задачу Коши:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial c}{\partial t}(t,x) + v\dfrac{\partial c}{\partial x}(t,x) = 0 \\ c(0,x) = c_0(x) \end{cases} \tag{4}$$

В данный момент нас интересует *классическое решение* данной задачи, потому что никаких других решений мы пока не знаем. Классическое решение подразумевает, что функции должны быть достаточно гладкими, чтобы подстановка решения в уравнения была определена и мы получили тождество.

Если мы вернемся к модели, то можем увидеть, что каждая частица нашей массы эволюционирует следующим образом:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v \\ x\Big|_{t=0} = x_0 \end{cases} \tag{5}$$

Есть догадка, что $c(t, x(t))$ — константа. Докажем это аналитически. Продифференцируем концентрацию по t:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}c(t, x(t)) = \frac{\partial c}{\partial t}(t, x(t)) + \frac{\partial c}{\partial x}(t, x(t)) \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

Согласно (4) и (5), правая часть равна 0.

Исходя из нашей догадки и закона движения частиц массы, можем записать классическое решение:

$$\boxed{c(t, x) = c_0(x - vt)} \tag{6}$$

Можем проиллюстрировать решение следующим образом:

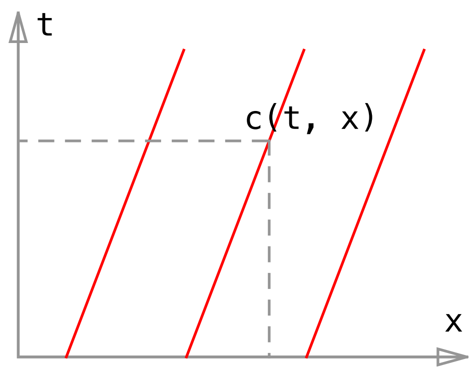

Рис. 2: Иллюстрация решения

Здесь показаны линии, соответствующие отдельно взятым частицам. Вдоль этих линий концентрация вещества остается постоянной — то есть, с течением времени просто происходит снос вещества с постоянной скоростью

> Если кто-то во все-это не верит/не понял/не запомнил — наплевать, берем формулу и подставляем.

Получившийся результат можем оформить в виде теоремы:

Теорема 1. *Если* $c_0 \in C^1(\mathbb{R})$, *то* (6) *— это единственное решение*[1] *задачи Коши* (4).

Такое решение называется решением бегущей волны (travelling wave)[2]:

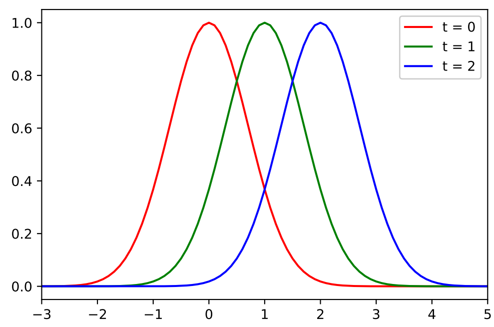

Рис. 3: Travelling wave

1.1.3 Решение неоднородного транспортного уравнения

Теперь предположим, что в правой части (4) у нас возникло какое-то возмущение, описываемое функцией $f(t,x)$. Рассмотрим теперь другую задачу:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial c}{\partial t} + v\dfrac{\partial c}{\partial x} = f(t,x) \\ c(0,x)) = c_0(x) \end{cases} \tag{7}$$

Аналогично случаю однородного транспортного уравнения, рассмотрим производную по времени $c(t,x(t))$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}c(t,x(t)) = \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial c}{\partial t} + v\frac{\partial c}{\partial x} = f(t,x(t))$$

В частности, если частицы движутся с постоянной скоростью, для любого x_0 мы имеем:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}c(t,x_0+vt) = f(t,x_0+vt)$$

и можем проинтегрировать:

$$c(t,x_0+vt) = c(0,x_0) + \int_0^t f(s,x_0+vs)\mathrm{d}s$$

[1] «Под решением здесь все еще подразумевается классическое»
[2] Что прекрасно иллюстрируется картинкой :)

Так как $x = x_0 + vt$, выразим $x_0 = x - vt$ и подставим:

$$\begin{aligned} c(t,x) &= c(0, x - vt) + \int_0^t f(s, x - vt + vs)\mathrm{d}s \\ &= c_0(x - vt) + \int_0^t f(s, x - v(t-s))\mathrm{d}s \end{aligned}$$

Теперь нам остается обеспечить лишь необходимую гладкость функций, чтобы полученная формула стала классическим решением задачи. Оформим получившийся результат в виде теоремы:

Теорема 2. *Если* $c_0 \in C^1(\mathbb{R})$, $f \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ *и* $\frac{\partial f}{\partial x} \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, *то*

$$\boxed{c(t,x) = c_0(x - vt) + \int_0^t f(s, x - v(t-s))\mathrm{d}s} \tag{8}$$

— единственное (классическое) решение (7).

1.2 Основная лемма вариационного исчисления

Полученный в данном параграфе результат потребуется нам в дальнейшем при решении волнового уравнения.

1.2.1 Формулировки

В вариационном исчислении центральное место занимает лемма Дюбуа-Реймона. Мы рассмотрим ее в двух формулировках и докажем более слабую из них.

Лемма А. *(лемма Дюбуа-Реймона, слабая формулировка)* $\Omega \in \mathbb{R}^n$ — область, $f \in C(\Omega)$ и выполняется

$$\int_\Omega f(x)g(x)\mathrm{d}x = 0 \tag{9}$$

для любых $g \in C_0^\infty(\Omega)$.[3] Тогда $f \equiv 0$.

Лемма Б. *(лемма Дюбуа-Реймона, сильная формулировка)* $\Omega \in \mathbb{R}^n$ — область, $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ и выполняется (9) для любых $g \in C_0^\infty(\Omega)$. Тогда $f \equiv 0$ почти всюду в Ω.

1.2.2 Доказательство леммы в слабой формулировке

Доказательство. От противного. Пусть $f \in C(\Omega)$ удовлетворяет (9) и $\exists x_0 \in \Omega$ такое, что $f(x_0) \neq 0$ (для определенности пусть $f(x_0) > 0$).

[3] Напоминание: $\operatorname{supp} g := \overline{\{x \colon g(x) \neq 0\}}$ — носитель функции, C_0^k — семейство функций с компактным носителем, у которых первые k производных непрерывны.

В силу непрерывности f существует $r > 0$ такое, что $f(x) > 0\ \forall x \in B_r(x_0) \subset \Omega$. Возьмем функцию $g(x) \in C^\infty(\Omega)$, которая бы всюду на $B_r(x_0)$ больше 0, а всюду вне $B_r(x_0)$ — равна 0. Ясно, что $\operatorname{supp} g = \overline{B_r(x_0)} \Subset \Omega$,[4] тем самым $g \in C_0^\infty(\Omega)$.

Мы знаем, что по условию:

$$\int_\Omega f(x)g(x)\mathrm{d}x = 0$$

С другой стороны:

$$\begin{aligned}\int_\Omega f(x)g(x)\mathrm{d}x &= \int_{B_r(x_0)} f(x)g(x)\mathrm{d}x + \int_{\Omega\setminus B_r(x_0)} f(x)g(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_{B_r(x_0)} f(x)g(x)\mathrm{d}x \\ &> 0\end{aligned} \tag{10}$$

Последнее справедливо в силу того, что обе функции положительны на области ненулевой меры.

Осталось доказать, что нужная функция g существует. Определим $\psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$\psi(x) \coloneqq \begin{cases} e^{1/\left(x^2-1\right)} & x \in (-1, 1) \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

График такой функции выглядит следующим образом:

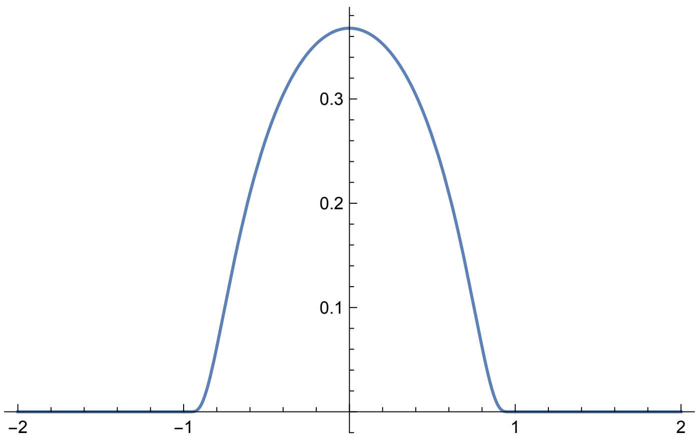

Рис. 4: График функции $\psi(x)$

Положим $g(x) \coloneqq \psi(|x - x_0|/r)$ — ни что иное, как тело вращения такой функции относительно оси, параллельной оси ординат и проходящей через точку x_0. Нетрудно показать, что она действительно удовлетворяет необходимым условиям.

Таким образом, получаем, что (10) противоречит (9). Теорема доказана. □

[4] $A \Subset B$ означает, что A — компактное подмножество B

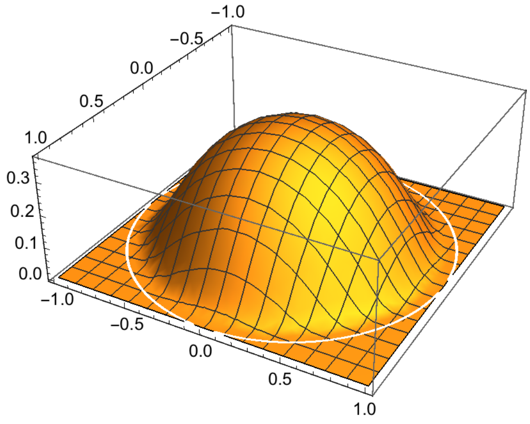

Рис. 5: График функции $g(x)$ для двумерного случая

1.3 Колебания струны и волновое уравнение

Рассмотрим еще одну модель. Теперь нам хотелось бы описать колебания струны уравнением.

1.3.1 Модель и формулировка задачи

Пусть у нас есть струна, выведенная из состояния равновесия. Струна определена на отрезке $[0, L]$ и описывается координатой x и смещением относительно состояния равновесия $u = u(t, x)$:

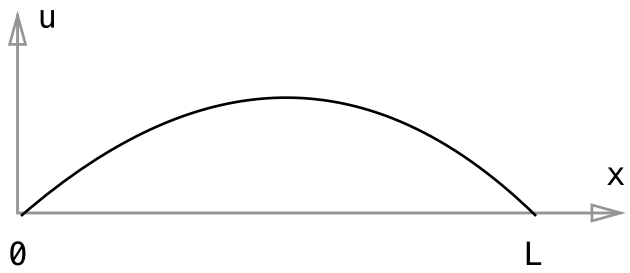

Рис. 6: Иллюстрация модели

Динамика такой системы подчиняется принципу, сформулированному в свое время еще Лагранжем — *принципу минимума действия*. Формулируется он следующим образом:

$$A = \int_0^\tau (T - U)\mathrm{d}t \longrightarrow \min \tag{11}$$

где A — работа, T — кинетическая энергия, U — потенциальная энергия.

Кинетическая энергия одного маленького отрезка струны равна:

$$\frac{u_t^2}{2}\rho_0 \Delta x$$

Кинетическая энергия всей струны находится как предел римановой суммы при измельчении разбиения:

$$T = \int_0^L \rho_0 \frac{u_t^2}{2} \mathrm{d}x \tag{12}$$

Теперь нам необходимо найти потенциальную энергию, заключенную в кусочке струны $[x, x + \Delta x]$. Изначально ее длина была Δx, но после того, как она была выведена из состояния равновесия, ее длину можно выразить по формуле длины дуги $\int_x^{x+\Delta x} \sqrt{1+u_x^2}\,\mathrm{d}x$. Потенциальную энергию будем считать как разность:

$$\begin{aligned}\int_x^{x+\Delta x} \sqrt{1+u_x^2}\,\mathrm{d}x - \Delta x &= \int_x^{x+\Delta x} \sqrt{1+y_x^2-1}\,\mathrm{d}x \\ &\approx \int_x^{x+\Delta x} \left(1 + \frac{u_x^2}{2} - 1\right) \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2} u_x^2 \Delta x\end{aligned} \tag{13}$$

где приближение обусловлено тем, что квадрат смещения струны пренебрежимо мал по отношению к ее длине.

Работу всей струны можем расписать как (11) с подстановкой (12) и (13):

$$\begin{aligned}A &= \int_0^\tau \mathrm{d}t \left(\int_0^L \frac{\rho_0}{2} u_t^2 \mathrm{d}x - \int_0^L \frac{\tau_0}{2} u_x^2 \mathrm{d}x \right) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\tau \mathrm{d}t \int_0^L \mathrm{d}x \left(\rho_0 u_t^2 - \tau_0 u_x^2\right)\end{aligned} \tag{14}$$

24 февраля 2018 г.

1.3.2 Вывод волнового уравнения

Чтобы решить задачу и вывести волновое уравнение, нам потребуется минимизировать функционал (14). Чтобы сделать это, рассмотрим его поведение при некотором маленьком возмущении, а именно — рассмотрим $A(u)$ и $A(u + \varepsilon v)$, где $v \in C_0^\infty((0, L) \times (0, \tau))$.

Из минимальности $A(u)$ следует, что $A(u) \leqslant A(u+\varepsilon v)$. Если мы перенесем правую часть влево и поделим на ε, получим следующую систему неравенств:

$$\begin{cases} \dfrac{A(u+\varepsilon v) - A(u)}{\varepsilon} \geqslant 0 & \varepsilon > 0 \\ \dfrac{A(u+\varepsilon v) - A(u)}{\varepsilon} \leqslant 0 & \varepsilon < 0 \end{cases}$$

Устремим $\varepsilon \to 0$ и рассмотрим левую часть первого неравенства. Ее предел — в точности *производная по направлению* v (также называемая *первой вариацией* A или *производной Гато* A по направлению v):

$$A'(x)v = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{A(u+\varepsilon v) - A(u)}{\varepsilon}$$

По непрерывности можем заключить, что решение u должно удовлетворять следующему условию:

$$\boxed{A'(u)v = 0} \tag{15}$$

Распишем левую часть условия[5]:

$$\begin{aligned}
A'(u)v &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon} A(u + \varepsilon v)\Big|_{\varepsilon=0} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon} \int_0^\tau \mathrm{d}t \int_0^L \mathrm{d}x \left(\rho_0 \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial v}{\partial \varepsilon}\right)^2}{2} - \tau_0 \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2}{2} \right) \Big|_{\varepsilon=0} \\
&= \int_0^\tau \mathrm{d}t \int_0^L \mathrm{d}x \left(\rho_0 \frac{2}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial v}{\partial t} \right) - \tau_0 \frac{2}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial v}{\partial x} \right) \Big|_{\varepsilon=0} \\
&= \int_0^\tau \mathrm{d}t \int_0^L \mathrm{d}x \left(\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial t} - \tau_0 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\
&= -\int_0^\tau \mathrm{d}t \int_0^L \mathrm{d}x \left(\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial t} - \tau_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Отсюда (почему? Как-то связано с основной леммой, но я не вкурил) на $(0, \tau) \times (0, L)$ имеем:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial t} - \tau_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} = 0$$

Можем поделить на ρ_0 и переписать это в виде:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial t} - \frac{\tau_0}{\rho_0} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} = 0$$

Полагая $c^2 := \tau_0 / \rho_0$, получаем *волновое уравнение*:

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial t} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} = 0} \text{ на } (0, +\infty) \times (0, L) \tag{16}$$

— уравнение в частных производных 2-го порядка.

1.3.3 Обобщение на $\mathbb{R}^n$

В качестве обобщения можно рассмотреть случай двумерной мембраны. Теперь $u = u(t, x, y)$. Волновое уравнение будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial t} - c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} \right) = 0$$

[5] Пока мы не делаем никаких предположений о гладкости функции, считая их *достаточно* гладкими, и допускаем, что мы можем внести производную под знак интеграла

Если продолжать по аналогии, можно вывести, что уравнение будет выглядеть следующим образом[6]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial t} - c^2 \Delta u = 0$$

Для волнового уравнения существует следующая запись:

$$\Box_{c^2} u = 0$$

где $\Box_k := \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial t} - k\Delta u$ — *оператор Даламбера.*

1.3.4 Решение задачи Коши для волнового уравнения

Пусть у нас имеется волновое уравнение (здесь $t \in \mathbb{R}^+$, а $x \in (-\infty, +\infty)$ — то есть у нас случай *бесконечной* струны):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t \partial t} - c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} = 0 \\ u(0, x) = u_0(x) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(0, x) = v_0(x) \end{cases} \tag{17}$$

Поясним. Струна колеблется, потому что она была изначально выведена из состояния равновесия — этим и обусловлены два последних условия (поточечно на начальное положение и скорость в нулевой момент времени).

Утверждается, что решение волнового уравнения можно свести к решению транспортного. Для этого положим $w := \frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x}$ и рассмотрим следующую разность:

$$\frac{\partial w}{\partial t} - c\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x}\right) - c\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial t} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} = 0$$

Относительно w это транспортное уравнение, поэтому пусть $w(t, x) = \psi(x + ct)$ — некоторое решение вида «бегущей волны». Мы получаем второе транспортное уравнение — на этот раз неоднородное:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = \psi(x + ct)$$

Для неоднородного уравнения мы знаем, что его решение выглядит как (8), поэтому можем расписать:

$$u(t, x) = \varphi(x - ct) + \int_0^t \psi(x - c(t - s) + cs)\mathrm{d}s \tag{18}$$

Осталось лишь найти подходящие φ и ψ. φ можем найти как:

$$u(0, x) = \varphi(x) = u_0(x)$$

[6]Напоминание: $\Delta x = \nabla \cdot (\nabla x)$ — лапласиан

ψ же можем найти как:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = \psi(x+ct)\Big|_{t=0} + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t}(\ldots)\mathrm{d}s\Big|_{t=0} - c\varphi'(x-ct)\Big|_{t=0}$$
$$= \psi(x) - c\varphi'(x) = \frac{\partial v}{\partial t}(x)$$

Получаем систему уравнений для φ и ψ:

$$\begin{cases} \varphi(x) = u_0(x) \\ \psi(x) = v_0(x) + cu_0'(x) \end{cases}$$

которую надо подставить в (18).

В результате получим *формулу Даламбера*:

$$\boxed{u(t,x) = \frac{u_0(x-ct)+u_0(x+ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \frac{\partial v}{\partial t}\mathrm{d}\xi} \tag{19}$$

Мы в очередной раз не делали никаких предположений о классах гладкости функций, поэтому снова оформим результат в виде теоремы:

Теорема 1. *Пусть $u_0 \in C^2(\mathbb{R}), v_0 \in C^1(\mathbb{R})$. Тогда (19) — единственное решение* (17).

Единственность следует из нашего построения.

1.3.5 Характеристические линии волнового уравнения

Прямые $x = x_0 + ct$ и $x = x_0 - ct$ называются *характеристическими линиями* волнового уравнения:

см. тетрадь

Рис. 7: Характеристические линии

Верхний/нижний конус, образованный характеристическими линиями, называется *волновым конусом будущего/прошлого.*

Чтобы понять их физический смысл, посмотрим на задачу в частных случаях. Пусть у нас произошло возмущение в одной точке (чего не может быть в гладком случае, поэтому рассмотрим сколь угодно малую окрестность). Тогда пересечение характеристики и мировой линии наблюдателя произойдет в момент, когда наблюдатель почувствует возмущение струны.

Тут на самом деле было сильно больше текста, но нужен ли он?

1.3.6 Вывод формулы Даламбера без использования транспортного уравнения

Для начала забудем о начальных условиях и получим общее решение уравнения. Пусть у нас имеется уравнение (16). Хотим перейти к новым переменным $\xi = \xi(x,t)$ и $\eta = \eta(x,t)$ так, чтобы x и t выражались через них как $x = X(\xi,\eta)$, $t = T(\xi,\eta)$ и уравнение имело какой-нибудь более простой вид:

$$u(t,x) = u(X(\xi,\eta),T(\xi,\eta)) = U(\xi,\eta) \tag{20}$$

Посмотрим, как выражаются производные после такой замены. По правилу цепочки:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t} \end{aligned} \tag{21}$$

Аналогично можем расписать и вторые производные:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial x}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial x} \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \xi}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \eta}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial t}\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t \partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial t}\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial t \partial t} \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \xi}\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t}\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \eta}\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)^2 \end{aligned}$$

После такой замены волновое уравнение будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \xi}\left(\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 - c^2\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2\right) + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\frac{\partial \eta}{\partial t} - c^2\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) \\ &+ \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \eta}\left(\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)^2 - c^2\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2\right) + \frac{\partial u}{\partial \xi}\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial t \partial t} - c^2\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial x}\right) + \frac{\partial u}{\partial \eta}\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial t \partial t} - c^2\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial x}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Мы хотим выбрать ξ и η так, чтобы волновое уравнение разрешалось как относительно ξ, так и относительно η:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 - c^2\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 = 0 \\ \left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)^2 - c^2\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 = 0 \end{aligned}$$

Для этого раскроем сумму квадратов:

$$\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}-c\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}+c\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)=0$$
$$\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}-c\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}+c\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)=0$$

Пропуск. Здесь я не очень понимаю, что происходит

Произведем замену $\xi = x+ct$, $\eta = x-ct$. Из суммы (1.3.6) уйдут все члены, кроме $2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\frac{\partial\eta}{\partial t}-c^2\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)$. Мы почему-то приходим к уравнению:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0 \tag{22}$$

Очень много пропущенного «*тупого счета*»...

1.3.7 Неоднородное волновое уравнение

Теперь предположим, что в правой части (17) у нас имеется некоторое возмущение ($x\in\mathbb{R}, t\in\mathbb{R}^+$):

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t\partial t}-c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial x}=f(t,x)\\ u(0,x)=u_0(x)\\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x)=v_0(x)\end{cases} \tag{23}$$

Такая задача называется *задачей возмущенных колебаний струны*. В общем виде для ее решения применяется так называемый метод Дюамеля. Мы же сначала рассмотрим частный случай задачи, когда $u_0\equiv 0$, $x_0\equiv 0$, а $f\not\equiv 0$.

Частный случай Пусть $u_0\equiv 0$, $x_0\equiv 0$, а $f\not\equiv 0$. Тогда (23) можно переписать в виде:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 w}{\partial t\partial t}-c^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial x}=0\\ w(s,x)=0\\ \dfrac{\partial w}{\partial t}(s,x)=f(s,x)\end{cases} \tag{24}$$

То есть, для каждого фиксированного s рассматривается задача, аналогичная (17), за тем лишь исключением, что вместо начального момента времени, который был равен 0, у нас теперь s.

Такая вспомогательная задача имеет решение[7]:

$$w(t,x;s)=\frac{1}{2c}\int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)}f(s,\xi)\mathrm{d}\xi$$

[7] Для существования f должно быть C^1 по пространственной переменной

Теорема 2. *Пусть* $f(t, \bullet) \in C^1(\mathbb{R}), f(\bullet, x) \in C(\mathbb{R}^+)$. *Тогда*

$$u(t,x) = \int_0^t w(t,x;s)\mathrm{d}s$$

— единственное решение (24).

Доказательство. Очевидно, что $u(0,x) = 0$. Рассмотрим $\frac{\partial u}{\partial t}$:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = w(t,x;t) + \int_0^t w_t(t,x;s)\mathrm{d}s.$$

Таким образом, начальные условия выполнены. Проверим, что решение удовлетворяет уравнению:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial t}(t,x) = \frac{\partial w}{\partial t}(t,x;t) + \int_0^t \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial t}(t,x;s)\mathrm{d}s$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x}(t,x) = \int_0^t \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial x}(t,x;s)\mathrm{d}s$$

Заметим, что $f(t,x) = \frac{\partial w}{\partial t}(t,x;t)$. Распишем левую часть волнового уравнения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial t} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} = f(t,x) + \int_0^t \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t \partial t}(t,x;s) - c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial x}(t,x;s) \right) \mathrm{d}s$$

Интеграл справа, очевидно, равен 0. □

Общий случай Теперь предположим, что $x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}^+$. Тогда пусть $\hat{u}$ — общее решение однородного волнового уравнение, $\tilde{u}$ — частное решение неоднородного. Тогда имеет место следующая теорема.

Теорема 3. *Решение* (23) *единственно и имеет вид* $u = \hat{u} + \tilde{u}$.

Доказательство. Оператор Даламбера — это линейный оператор:

$$\Box_{c^2} u = \Box_{c^2} \hat{u} + \Box_{c^2} \tilde{u}$$

Начальные условия выглядит следующим образом:

$$u(0,x) = \hat{u}(0,x) + \tilde{u}(0,x) = u_0(x)$$
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = v_0(x)$$

Теперь докажем единственность. Предположим, что существует два решения u_1 и u_2 волнового уравнения (23). Рассмотрим их разность $u \coloneqq u_1 - u_2$. Тогда:

$$\Box_{c^2} u = \Box_{c^2} u_1 - \Box_{c^2} u_2 = f - f = 0$$
$$u(0,x) = u_1(0,x) - u_2(0,x) = 0$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = \frac{\partial u_1}{\partial t}(0,x) - \frac{\partial u_2}{\partial t}(0,x) = 0$$

Из формулы Даламбера заключаем, что решение — тождественный ноль, что означает, что $u_1 = u_2$. □

3 марта 2018 г.

Я болел :(

10 марта 2018 г.

1.5 Принцип максимума для уравнения теплопроводности

Пропущена первая половина лекции

Доказательство. Зафиксируем u, возьмем $\varepsilon > 0$. Положим

$$v_\varepsilon(t,x) \coloneqq u(t,x) = e|x|^2 \geqslant u(t,x) \tag{25}$$

Применим L к v_ε:

$$Lv_\varepsilon = \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial t} - a^2\Delta v_\varepsilon = (\frac{\partial u}{\partial t} - a^2\Delta u) - \varepsilon a^2 \Delta \underbrace{|x|^2}_{2n} = -2\varepsilon a^2 n < 0 \tag{26}$$

Докажем, что v_ε не достигает своего максимума на «верхней крышке» или внутри стакана:

1. Пусть максимум достигается на (x_0, t_0), где $x_0 \in \Omega$, $t_0 < T$. Тогда:

$$\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial t} = 0 \tag{27}$$

$$\frac{\partial^2 v_\varepsilon}{\partial x_i \partial x_i} \leqslant 0 \tag{28}$$

   Отсюда:

$$(Lv_\varepsilon)(t_0, x_0) = \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial t} - a^2 \sum_i \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_i^2}\bigg|_{t_0,x_0} \geqslant 0 \tag{29}$$

2. Пусть максимум достигается на... чем? Считаем то же самое (что?)

Заключаем, что не на параболической границе функция достигать своего максимума не можем. В итоге имеем[8]:

$$u(t,x) \leqslant v_\varepsilon(t,x) \leqslant \max_{\overline{Q_T}} v_\varepsilon = \max_{S_T} v_\varepsilon = \max_{S_T}(u + \varepsilon|x|^2) \leqslant \max_{S_T} u + \varepsilon \max_{S_T} |x|^2 \tag{30}$$

Подводя итог, заключаем, что:

$$u(t,x) \leqslant \max_{S_T} u + C\varepsilon \tag{31}$$

Теорема доказана. □

[8] S_T — параболическая граница

1.5.1 Принцип максимума уравнения теплопроводности во всем пространстве

Пусть $Lu = \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = 0$, $t \in \mathbb{R}^+$, $x \in \mathbb{R}^n$. (u — классическое решение, а, следовательно, непрерывно вплоть до $t = 0$).

Пусть дополнительно $|u(t,x)| \leqslant C_T$ для всех $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$ — «стакан стал бесконечен и боковых стенок у него нет»; параболическая граница — $t = 0$ (вырожденный случай).

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} M_+ &:= \sup_{x \in \mathbb{R}^n, t \in [0,T]} u(t,x) \\ M_- &:= \inf_{x \in \mathbb{R}^n, t \in [0,T]} u(t,x) \end{aligned} \tag{32}$$

$$\begin{aligned} N_+ &:= \sup_{x \in \mathbb{R}^n} u(0,x) \\ N_- &:= \inf_{x \in \mathbb{R}^n} u(0,x) \end{aligned} \tag{33}$$

Теорема 1. *$M_+ = N_+$.*

Следствие 1. *$M_- = N_-$.*

Доказательство. Применим теорему к $-u$. $\square$

Поставим задачу Коши:

$$\begin{cases} u_t - a^2 \Delta u = f \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases} \tag{34}$$

Имеет место быть следующее следствие:

Следствие 2. *Система* (34) *не может иметь двух разных классических решений, удовлетворяющих ограничениям из начала параграфа.*

Доказательство. Пусть u_1, u_2 — два решения. Рассмотрим $u := u_1 - u_2$. Тогда система (34) превращается в:

$$\begin{cases} Lu = Lu_1 - Lu_2 = f - f = 0 \\ u(0,x) = u_1(0,x) - u_2(0,x) = 0 \end{cases} \tag{35}$$

Отсюда u — класс решений; при этом u также лежит в необходимом классе функций. Следовательно, $\sup u = \inf u = \sup_{S_T} u = 0$, откуда u — тождественный ноль и $u_1 = u_2$. $\square$

Замечание. Пример не единственности (неклассического) решения — пример Тихонова.

Доказательство. (теоремы) Положим ~~огромнейший болт на все это~~:

$$v_\varepsilon(t,x) \coloneqq u(t,x) - \varepsilon(2na^2t + |x|^2) \tag{36}$$

Применим L:

$$Lv_\varepsilon = Lu - \varepsilon L(2na^2t + |x|^2) = -\varepsilon(2na^2 - a^2 2n) = 0 \tag{37}$$

Рассмотрим цилиндр $\overline{Q_{R,T}} \coloneqq [0,T] \times \overline{B_R(0)}$.
Оценим $v_\varepsilon(0,x)$ сверху:

$$v_\varepsilon(0,x) = u(0,x) - \varepsilon|x|^2 \leqslant N_+ \tag{38}$$

Посмотрим на поведение v_ε на границе шара:

$$v_\varepsilon(t,x)\Big|_{x\in \operatorname{fr} B_R(0)} = u(t,x)\Big|_{x\in \operatorname{fr} B_R(0)} = \varepsilon R^2 - 2a^2n\varepsilon t \leqslant M_+ - \varepsilon R^2 \leqslant N_+ \tag{39}$$

Последнее справедливо в силу того, что подходящее R мы действительно можем подобрать. Таким образом, для всех достаточно маленьких ε в любом таком цилиндре подобное неравенство выполняется. Wut? Что произошло?

Устремляем $\varepsilon \to 0$. Неравенство (39) обратится в равенство. (почему?) □

1.5.2 Начальная краевая задача

Рассмотрим следующую задачу (здесь $t \in \mathbb{R}^+, x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$):

$$\begin{cases} Lu = u_t - a^2\Delta u = f \\ u\Big|_{\operatorname{fr}\Omega} = \psi \\ u\Big|_{t=0} = u_0 \end{cases} \tag{40}$$

причем $f = f(x), \varphi = \varphi(x)$ — не зависят от времени.

Но перед этим рассмотрим частный случай, когда $f \equiv 0$ и $\psi \equiv 0$.

Теорема 2. $u(t,x) \to 0$ *(равномерно по x; с экспоненциальной скоростью).*

Доказательство. НУО положим, что Ω включает 0 и вложена в куб Q. Рассмотрим следующую функцию:

$$v(t,x) = Ae^{-bt}\prod_{i=1}^{n}\cos cx_i \tag{41}$$

Применим к ней оператор теплопроводности:

$$Lv = \frac{\partial v}{\partial t} - a^2\Delta v = -bv + a^2c^2nv = v(-b + a^2c^2n) = 0 \tag{42}$$

Положим $\boxed{b \coloneqq a^2c^2n}$. Возьмем такое c, что $\cos(cx_i) > 0$ для любых $x_i \in [-d, d]$. Дополнительно возьмем такое A, что:

$$A\prod_{i=1}^{n}\cos(cx_i) \geqslant \|u_0\|_\infty \tag{43}$$

Введем следующие обозначения:

$$W_+(t,x) \coloneqq v(t,x) + u(t,x) \tag{44}$$
$$W_-(t,x) \coloneqq v(t,x) - u(t,x) \tag{45}$$

Применим к ним оператор теплопроводности. Очевидно, $LW_\pm = 0$. Посмотрим на поведение $W_\pm$ при $t = 0$. Имеем:

$$W_\pm\Big|_{t=0} = v\Big|_{t=0} \pm u\Big|_{t=0} = A\prod_{i=1}^{n}\cos(cx_i) \pm u_0(x) \geqslant 0 \tag{46}$$

А тут я отвлекся. Какая печаль. □

Теперь можем приступить к рассмотрению общего случая. Рассмотрим вспомогательное уравнение... Еще тут была формлировка теоремы (не одной?).

Доказательство. Пусть существуют два решения u и v. Положим $w \coloneqq u - v$. Применим оператор:

$$Lw = Lu - Lv = 0 \tag{47}$$

Посмотрим на поведение на границе:

$$w\Big|_{\operatorname{fr}\Omega} = u\Big|_{\operatorname{fr}\Omega} - v\Big|_{\operatorname{fr}\Omega} = 0 \tag{48}$$

и при $t = 0$:

$$w\Big|_{t=0} = u_0 - v \tag{49}$$

Следовательно, $|w(t,x)| \leqslant Ae^{-bt}$, то есть $|u(t,x) - v(x)| \leqslant Ae^{-bt}$. □

24 марта 2018 г.

1.6 Обобщенные функции

Опять пропущена первая пара. Да что ж такое...

Напоминание: как интегрировать по частям в многомерном случае. Первая формула Грина.

Второй пример Поменяем порядок:

$$\int_\Omega v \cdot \Delta u \mathrm{d}x = -\int_\Omega \Delta u \cdot \Delta v \mathrm{d}x + \int_\Omega \partial\Omega v(x)\frac{\partial u}{\partial n}(x)\mathrm{d}\sigma(x) \tag{50}$$

Вычитая первое из второго, получаем

$$\text{Еще одна выкладка} \tag{51}$$

Следствие. *Пусть* $-\Delta u = f$ *в* Ω, *где* Ω *— ограниченное множество с гладкой границей,* f *— непрерывная на* $\bar{\Omega}$ *функция,* u *— классическое решение* ($u \in C^2(\bar{\Omega})$). *Тогда:*

$$\int_\Omega f \mathrm{d}x = -\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}\sigma \tag{52}$$

(«количество тепла, которое выделилось, равно количеству тепла, ушедшего через границу»)

Следствие.

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ в } \Omega, \text{ где } \Omega \text{ — огр.} \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ на } \Omega \end{cases} \tag{53}$$

— задача Неймана. Классическое решение существует, если $\int_\Omega f \mathrm{d}x = 0$.

Теорема. *Пусть* Ω *совпадает с* $\mathbb{R}^n$, *где* $n \geqslant 3$. *Тогда решением* $-\Delta u = f$ *в* $D'(\Omega)$ *является*

$$u(x) = \frac{C_n}{|x|^{n-2}} \tag{54}$$

Доказательство. Рассмотрим $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$:

$$\begin{aligned} \langle \varphi, -\Delta u \rangle &= -\sum_{i=1}^n \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_i}, u \right\rangle = -\langle \Delta\varphi, u \rangle = \\ &= -\int_{\mathbb{R}^n} \Delta\varphi(x)u(x)\mathrm{d}x = -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{B_\varepsilon^C(0)} \Delta\varphi(x)u(x)\mathrm{d}x \\ &= -\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{B_\varepsilon^C(0)} \Delta u(x)\varphi(x)\mathrm{d}x + \int_{\partial B_\varepsilon(0)} u(x)\frac{\partial \varphi}{\partial n}(x)\mathrm{d}\sigma(x)\right) \end{aligned} \tag{55}$$

Упражнение: проверить, что вне нуля классический лапласиан равен нулю.
Посмотреть выкладки у ребят... □

Данная функция называется фундаментальным решением уравнения Лапласа. Классический же лапласиан всюду равен нулю.

Частный случай $n = 3$: $\omega_3 = \frac{4}{3}\pi$, $u(x) = \frac{1}{3\cdot\frac{4}{3}\pi\cdot|x|} = \frac{1}{4\pi|x|}$.

Вообще иногда физики часто вместо δ пишут $\delta(x)$ «как если бы это была функция», а вместо угловых скобок «нахальным образом» пишут интегралы, что с точки зрения математики не совсем корректно.

Какое-то лирическое отступление про свертку

Докажем один простой случай (теорема далеко не самая общая)

Теорема 1. *Пусть* $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$. *Тогда*

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y)f(y)\mathrm{d}y \tag{56}$$

является классическим решением *уравнения Пуассона* $-\Delta u = f$ *в* $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. Во-первых, свертку можно перекинуть:

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y)f(x-y)\mathrm{d}y \tag{57}$$

Давайте считать соответственно $-\Delta u$:

$$-\Delta u = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y)(-\Delta_x)f(x-y)\mathrm{d}y \tag{58}$$

Хотим доказать, что это равно f. Будем это делать в обобщенных производных (поскольку классические производные есть и непрерывны, они совпадут с обобщенными):

$$\begin{aligned}
\langle\varphi, -\Delta u\rangle &= -\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y)\mathrm{d}y \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\Delta_x f(x-y)\mathrm{d}x \\
&= -\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y)\mathrm{d}y \int_{\mathbb{R}^n} \Delta\varphi(x) f(x-y)\mathrm{d}x \\
&= -\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y)\mathrm{d}y \int_{\mathbb{R}^n} \Delta\varphi(y+z) f(z)\mathrm{d}z \\
&= -\int_{\mathbb{R}^n} -f(z)\mathrm{d}z \int_{\mathbb{R}^n} (-\Delta\varphi(y+z))\Phi(y)\mathrm{d}y \quad \text{— теорема Фубини} \\
&= -\int_{\mathbb{R}^n} -f(z)\mathrm{d}z \langle\varphi(\bullet + z), \delta\rangle \qquad \text{а вот тут я не уверен} \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(z)\varphi(z)\mathrm{d}z
\end{aligned} \tag{59}$$

Таким образом, $\langle\varphi, -\Delta u\rangle = \langle\varphi, f\rangle$, откуда $-\Delta u = f$. □

8 апреля 2018 г.

Резюме

Был продемонстрирован «зоопарк» простых дифуров в частных производных. По поводу каждого дифура были произнесены «какие-то физические слова, как-то соотносящие дифур с физикой». Для самых частых задач выписаны формулы в частном виде. Были сформулированы теоремы вида «при каких условиях решение существует и единственно». В первой части говорили в основном о классических решениях. Были введены обобщенные производные.

2 Обобщенные решения

Во второй части речь пойдет об обобщенных решениях. Будем решать:

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ в } \Omega \subset \mathbb{R}^n, \ \underline{\text{огр.}} \\ u\Big|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{60}$$

Кто хочет, может записать, а потом зачеркнуть. Это путь, который ведет в никуда. Заранее предупреждаю, чтобы не жаловались.

Рассмотрим функционал:

$$F(u) := \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x - \int_\Omega fu\mathrm{d}x \tag{61}$$

Для каких функций определен этот функционал? Хочется, чтобы функция $u \in C^1(\Omega)$ (и, по возможности, чтобы градиент был ограничен — то есть $u \in C^1(\bar{\Omega})$). Дополнительно пусть $u\big|_{\partial\Omega} = 0$.

Задача осмысленна и минимум почему-то должен быть.

Возьмем $h \in C^1(\bar{\Omega})$, $h\big|_{\partial\Omega} = 0$. Будем варьировать:

$$F(u + \varepsilon h) \geqslant F(u) \tag{62}$$

Данное уравнение равносильно следующей системе:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\varepsilon}(F(u+\varepsilon h) - F(u)) \geqslant 0 \quad \varepsilon > 0 \\ \dfrac{1}{\varepsilon}(F(u+\varepsilon h) - F(u)) \leqslant 0 \quad \varepsilon < 0 \end{cases} \tag{63}$$

Рассмотрим предел:

$$\begin{aligned} &\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{F(U+\varepsilon h) - F(u)}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0} \left(\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u + \varepsilon \nabla h|^2 - \int_\Omega f(u+\varepsilon h) - \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_\Omega fu \right) \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0} \left(\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla h + \frac{1}{2}\varepsilon \int_\Omega |\nabla h|^2 - \int_\Omega fh \right) \\ &= \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla h - \int_\Omega fh \end{aligned} \tag{64}$$

Избавимся от производных по h. Считаем, что $u \in C^2(\bar{\Omega})$ и интегрируем по частям. Приходим к:

$$\int_\Omega (-\Delta u - f)h = 0 \tag{65}$$

Что равносильно:

$$\begin{cases} -\Delta u = f \\ u\Big|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{66}$$

Если бы удалось доказать, что минимум существует и что интегрирование по частям оправдано, то мы могли бы заключить, что минимум является решением. Получаем оптимизационную задачу (метод Рисса).

Тут было лирическое отступление про метод Тонелли, полунепрерывность снизу и минимизирующие последовательности.

Теорема 1. *(Тонелли) Если во множестве X возможно придумать такую топологию, что какая-то минимизирующая последовательность $f(x_1), f(x_2), \dots$ в ней компактна и f — полунепрерывна снизу, тогда существует $x_0 \in X$ такая, что $f(x_0) = \inf_X f$.*

Доказательство. Пусть такая топология нашлась. Пусть есть сходящаяся подпоследовательность x_{k_l}. Вдоль последовательности f убывает $\Rightarrow$ вдоль подпоследовательности тоже. Пусть $x_{k_l} \to x_0$. Но $f(x_0) \leqslant \lim_{k\to\infty} f(x_k) \leqslant \lim_{l\to\infty} f(x_{k_l}) = \inf_X f$, откуда $f(x_0) = \inf_X f$. □

Пусть у нас есть минимизирующая последовательность функций $\{u_k\}$. Рассмотрим, как ведет на ней себя (61):

$$F(u_k) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_k|^2 - \int_\Omega f u_k \tag{67}$$

и $F(u_k) \to \inf F$. (so what?)

Но нас нет никакой гарантии, что минимизирующая последовательность будет к чему-то сходиться. Даже если это и так, то не факт, что предел будет в C^1.

Давайте рассмотрим одномерную ситуацию: $\Omega = (-1, 1) \subset \mathbb{R}$ и $f \equiv 0$. Все, что мы можем сказать:

$$\int_{-1}^{1} |u_k'|^2 \leqslant C \tag{68}$$

— это мало что нам дает. (а что именно?)

Любопытная идея, но что делать дальше — непонятно.

Определение. Говорят, что $u \in H_0^1(\Omega)$, если $u \in L^2(\Omega)$ и найдется такая последовательность $\{v_k\}$, $v_k \in C_0^\infty(\Omega)$ такая, что $v_k \to u$ в $L^2(\Omega)$ и $\frac{\partial v_k}{\partial x_i} \to u_i$ в $L^2(\Omega)$ для всех $i = 1, \dots, n$.

Рассмотрим $\langle \varphi, \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \rangle$ — обобщенную производную. В силу того, что $\varphi \int D(\Omega) = C_1^\infty(\Omega)$, можем расписать:

$$\langle \varphi, \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \rangle = -\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, v_k \rangle = -\int_\Omega \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} v_k \to -\int_\Omega \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} u = -\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, u \rangle = -\langle \varphi, \frac{\partial u}{\partial x_i} \rangle \tag{69}$$

С другой стороны:

$$\langle \varphi, \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \rangle \to \int_\Omega \varphi u_i = \langle \varphi, u_i \rangle \tag{70}$$

Отсюда заключаем, что $u_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$.

Тут на самом деле какая-то магия с функционалами. Нужно уточнить.

В частности, оказывается, что если $u \int H_0^1(\Omega)$, то из этого следует $u \int L^2(\Omega)$ и все $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)$. Но не наоборот!

Иногда полезно ввести обозначение $H^1(\Omega)$ («без нолика»): это такие $u \in L^2(\Omega)$, что все частные производные из $L^2(\Omega)$. Ясно, что $H_0^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$.

На этих множествах хочется ввести какую-то структуру. Сделаем из $H^1(\Omega)$ нормированное пространство. Введем норму:

$$\|u\|_{H_1} = \sqrt{\|u\|_2^2 + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_2^2} = \sqrt{\|u\|_2^2 + \|\nabla u\|_2^2} \tag{71}$$

Но это не норма! В частности, она бывает равна нулю на ненулевой функции (например, на функции вида «ноль везде, кроме нуля»). Однако, если мы профакторизуем H^1 по отношению равенства почти всюду, то она станет нормой. Смысл такой нормы — сходимость по норме H_1 означает сходимость в L^2 самих функций и первых обобщенных производных.

Что-то

Еще норма H^1 определяется скалярным произведением:

$$(u, v)_{H_1} \coloneqq (u, v)_{L_2} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L_2} \tag{72}$$

Рассмотрим один простой частный случай. Пусть $\Omega = (a, b) \subset \mathbb{R}$. Сформулируем теорему:

Теорема 2. *(теорема вложения Соболева)* $H_0^1(\Omega) \subset C([a, b])$.

Доказательство. Пусть $u \in C^1([a, b])$. По теореме о среднем существует ξ такое, что $u(\xi) = \int_a^b u(s)\mathrm{d}s$. Имеем:

$$|u(x)| = \left| u(\xi) + \int_\xi^x u'(s)\mathrm{d}s \right| \leqslant \left| \frac{1}{b-a} \right| \left| \int_a^b u(s)\mathrm{d}s \right| + \left| \int_a^b u'(s)\mathrm{d}s \right| \tag{73}$$

Применим неравенство Гёльдера (в этой выкладке я очень не уверен):

$$\begin{aligned} |u(x)| &\leqslant \frac{1}{b-a} \int_a^b |u(s)\mathrm{d}s| + \int_a^b |u'(s)\mathrm{d}s| \\ &\leqslant \frac{1}{\sqrt{b-a}} \|u\| \sqrt{b-a} + \|u'\| \sqrt{b-a} \\ &\leqslant C(|b-a|) \sqrt{\|u\|_2^2 + \|u'\|_2^2} \end{aligned} \tag{74}$$

Отсюда $|u(x)| \leqslant C\|u\|_{H^1}$, то есть $\|u\|_\infty \leqslant C\|u\|_{H^1}$.

Теперь рассмотрим $u \in H_0^1([a,b])$. Рассмотрим последовательность $v_k \in C_0^\infty(a,b)$ такую, что $v_k \to u$ в H^1. Тогда:

$$\|v_k - v_m\|_\infty \leqslant C\|v_k - v_m\|_{H^1} \tag{75}$$

Это позволяет нам заключить, что $v_k \rightrightarrows v \in C([a,b])$, а $v = u$ в $L^2(a,b)$. □

Тут было какое-то «любопытное замечание»

Следствие 1. *Если $u \in H_0^1(a,b)$, то существует $u'_{\text{кл}}(x)$ для почти всех $x \in (a,b)$ и $u'_{\text{кл}}(x) = u'_{\text{обобщ}}(x)$ почти всюду на (a,b). При этом u — обобщенно непрерывная.*

Доказательство. Для любого $w \in C_0^\infty(a,b)$ справедливо $w(x) = \int_a^x w'(s)\mathrm{d}s$. Пусть $u \in H_0^1(a,b)$. Рассмотрим последовательность $v_k \in C_0^\infty(a,b)$, сходящуюся к u в смысле H_1. Имеем:

$$v_k(x) = \int_a^x v_k(s)\mathrm{d}s \to \int_a^x u'_{\text{обобщ}}(s)\mathrm{d}s \tag{76}$$

С другой стороны, $v_k(x) \to v(x)$. Получили:

$$v(x) = \int_a^x u'_{\text{обобщ}}(s)\mathrm{d}s \tag{77}$$

ЧТО ПРОИСХОДИТ □

Все это верно исключительно для одномерного случая. В многомерных случаях, вообще говоря, члены H_0^1 не обязаны иметь даже непрерывных представителей.

Верно ли, что пространство H_0^1 полное? Да!

Теорема 3. *H^1 и H_0^1 — гильбертовы пространства.*

Доказательство. Возьмем произвольную фундаментальную последовательность. Имеем $\|u_k - u_m\|_{H^1} \to \infty$ при $k,m \to 0$. В частности, $\|u_k - u_m\|_{L^2} \to 0$, то есть $u_k \to u$ в смысле L^2. То же самое справедливо для производных: $\frac{\partial u_k}{\partial x_i} \to u_i$ в смысле L^2. □

Теорема 4. *А еще они сепарабельны!*

Доказательство. Рассмотрим оператор L: $u \in H'(\Omega) \mapsto (u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}) = Lu$. Посчитаем норму $\|Lu\|_2$. Это ни что иное, как $\|u\|_{H^1}$. То есть, L на самом деле является изометрией между H^1 и образом этого оператора. Следовательно, образ замкнут. H^1 сепарабельно в силу того, что оно изометрично замкнутому подпространству сепарабельного пространства. □

Пусть дан функционал:

$$F(u) \coloneqq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x - \int_\Omega fu\mathrm{d}x \tag{78}$$

где $u \in H_0^1(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ограничено и открыто. Пусть $f \in L^2(\Omega)$.

Пусть $u \in H_0^1(\Omega)$ — $\arg\min$ этого функционала. Тогда для любой допустимой вариации:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{F(u+\varepsilon h) - F(u)}{\varepsilon} = 0 \tag{79}$$

Этот предел равен:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla h \mathrm{d}x - \int_\Omega fh\mathrm{d}x \tag{80}$$

(на самом деле, это все то, что было сказано ранее в «лирическом отступлении» с той лишь разницей, что градиенты обобщенные).

что-то

У нас имеется соотношение (откуда оно взялось?):

$$-\sum_{i=1}^n \left\langle h, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_i}\right\rangle - \langle h, f\rangle = 0 \tag{81}$$

$$-\langle h, \Delta u\rangle - \langle h, f\rangle = 0 \tag{82}$$

$$\langle h, -\Delta u - f\rangle = 0 \tag{83}$$

$$\begin{cases} -\Delta u = f \\ \quad u \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \tag{84}$$

То есть, минимайзер является решением уравнения Пуассона. Но где краевое условие? «Зашифровано в нолике H_0^1». Теперь в поиске минимайзера появился смысл, потому что он является обобщенным решением уравнения Пуассона.

Неравенство Фридрихса

Теорема 5.

$$\begin{cases} \forall u \in H_0^1(\Omega) & \|u\|_2 \leqslant C\|\nabla u\|_2 \\ \Omega \subset \mathbb{R}^n \text{— ограничено, открыто} \end{cases} \tag{85}$$

Доказательство. Чекнуть у ребят □

Вернемся к функционалу (78). Рассмотрим минимизирующую последовательность u_k, устремляющую F к $\inf F$ в смысле $H_0^1(\Omega)$. Хотим доказать, что $\|u_k\|_{H^1} \leqslant C(f, \Omega)$. Вторым шагом будет выбрать подпоследовательность, слабо сходящуюся к u

14 апреля 2018 г.

Рассмотрим функционал:

$$F(u) := \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x - \int_\Omega fu\mathrm{d}x \tag{86}$$

Здесь $u \in H_0^1(\Omega)$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ открытое и ограниченное[9], $f \in L^2(\Omega)$.

Теорема 6. *Существует такое* $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, *что* $F(u_0) = \inf_{H_0^1(\Omega)} F$.

Ранее был рассмотрен другой функционал на пространстве гладких функций, но доказать существование минимума не удавалось. В случае соболевских пространств это делается легко:

Доказательство. Рассмотрим минимизирующую последовательность $u_k \in H_0^1(\Omega)$ и $F(u_k)$ убывает к $\inf_{H_0^1(\Omega)} F$.

Можем расписать $F(u_k)$:

$$F(u_k) = \frac{1}{2}\|\nabla u_k\|_2^2 - \int_\Omega fu_k\mathrm{d}x \tag{87}$$

Интеграл поделим и умножим на ε, а затем оценим сверху:

$$\int_\Omega fu_k\mathrm{d}x = \frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega \varepsilon u_k\mathrm{d}x \leqslant \int_\Omega \frac{1}{2}\left(\left(\frac{f}{e}\right)^2 + (\varepsilon u_k)^2\right)\mathrm{d}x \tag{88}$$

Это позволяет нам в свою очередь оценить (87):

$$F(u_k) \geqslant \frac{1}{2}\|\nabla u_k\|_2^2 - \frac{1}{2}\varepsilon^2\int_\Omega f^2 - \varepsilon^2\|u_k\|_2^2 \tag{89}$$

В то же время, по неравенству Фридрихса:

$$\|u_k\|_2^2 \leqslant C(\Omega)\|\nabla u_k\|_2^2 \tag{90}$$

Что позволяет на продолжить оценку (89):

$$\text{глянуть выкладку} \tag{91}$$

Если мы подставим 0 в наш функционал, получим следующее неравенство:

$$\frac{1}{2}(1 - \varepsilon^2 C(\Omega))\|\nabla u_k\|_2^2 \leqslant \frac{1}{2\varepsilon^2}\|f\|_2^2 \tag{92}$$

и это для любого ε. Следовательно, если мы подставим хорошее (какое?) ε, можем получить следующую оценку, сохранив неравенство:

$$\|\nabla u_k\|_2^2 \leqslant C(\|F\|_2, \Omega) \tag{93}$$

[9] нужно для того, чтобы применить неравенство Фридрихса

В свою очередь,
$$\|u_k\|_2^2 \leqslant C(\Omega)\|\nabla u_k\|_2^2 \leqslant C \tag{94}$$

Что мы получили? Если u_k — минимизирующая, то вся она находится в каком-то шаре пространства H_0^1.

Перейдем к следующему шагу. Используем факт, что H_0^1 — сепарабельное гильбертово пространство, а конкретно — свойство, что из любой последовательности в шаре этого пространства можно выбрать слабо сходящуюся подпоследовательность.

Пусть $u_{k_m} \to u \in H_0^1(\Omega)$ слабо. Рассмотрим вложение $i\colon H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$. Проверим ограниченность оператора вложения. Проверили. Из этого следует, что $u_{k_m} \to u$ слабо в смысле $L^2(\Omega)$.

Мало того, давайте рассмотрим дополнительно следующие операторы обобщенного дифференцирования (их n штук — по размерности пространства):

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \coloneqq u \in H_0^1(\Omega) \mapsto \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \tag{95}$$

Они тоже ограничены, следовательно последовательность $\frac{\partial u_{k_m}}{\partial x_i} \to \frac{\partial u}{\partial x_i}$ в смысле $L^2(\Omega)$.

Теперь устремим $m \to \infty$. Рассмотрим значения функционала на функциях u_{k_m}:

$$F(u_{k_m}) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_{k_m}|^2 - \int_\Omega f u_{k_m} \tag{96}$$

Посмотрим на второй интеграл. $u_{k_m} \to u$ в смысле $L^2(\Omega)$, следовательно интеграл, будучи линейным непрерывным функционалом на L^2, ведет себя следующим образом:
$$\int_\Omega f u_{k_m} \mathrm{d}x \to \int_\Omega f u \mathrm{d}x \tag{97}$$

Чтобы убить первый интеграл, оценим $(\nabla u_k - \nabla u)^2$:

$$0 \leqslant (\nabla u_k - \nabla u)^2 = |\nabla u_k|^2 + |\nabla u|^2 - 2\nabla u_k \cdot \nabla u \tag{98}$$

То есть:
$$|\nabla u_k|^2 - |\nabla u|^2 \geqslant 2\nabla u \cdot (\nabla u_k - \nabla u) \tag{99}$$

Поделим обе части неравенства на 2 и проинтегрируем по Ω, а также распишем скалярное произведение:

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_k|^2 - \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 \geqslant \int_\Omega \nabla u \cdot (\nabla u_{k_m} - \nabla u) \tag{100}$$

Правую часть можем приравнять:

$$\text{выкладка} \tag{101}$$

В силу доказанного ранее можем перейти к пределу. Получим:

$$\liminf \frac{1}{2}\int_{\Omega} |\nabla u_{k_m}|^2 - \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \geqslant 0 \tag{102}$$

Можем переформулировать это следующим образом.

$$\text{выкладка} \tag{103}$$

иначе говоря, мы докзали, что наш функционал полунепрерывен снизу.

Завершим наше доказательство. Заметим, что $\lim_m \inf F(u_{k_m}) \to \inf_{H_0^1}(\Omega)F \geqslant F(u)$. Но $F(u)$ само из H_0^1, следовательно, получаем равенство. □

Какая связь между полученным результатом и уравнением Пуассона? Рассмотрим $F(u) = \inf_{H_0^1(\Omega)} \inf F$, где $u \in H_0^1(\Omega)$, и посмотрим, какому уравнению наше u удовлетворяет.

Возьмем произвольную вариацию $\varphi \in H_0^1(\Omega)$. Гарантированно имеем $F(u) \leqslant F(u + \varepsilon\varphi)$.

Пропущена часть лекции

Второе доказательство — ни что иное, как приложение леммы к случаю конкретных пространств, а сама лемма является частным случаем теоремы Рисса. Доказательство с функционалом же конструктивно и позволяет нам понять, как выглядит решение.

На основе первого доказательства основан численный метод — метод Ритца.

21 апреля 2018 г.

:(

28 апреля 2018 г.

Пропущены первые 20 минут лекции.

Если мы возьмем самосопряженный компактный оператор и рассмотрим любой конечный интервал $[-c, c]$, то вне него будет лежать не более чем конечное количество собственных чисел. Иными словами, у множества собственных чисел самосопряженного компактного оператора единственная возможная точка сгущения — 0.

Для оператора Δ у нас возможны две альтернативы: либо количество собственных чисел конечно, либо есть сколь угодно большое собственное число (потом мы узнаем, что первая альтернатива не реализуется).

Теперь поговорим о собственных функциях. Утверждение: если взять две любые собственные функции u и u', соответствующие двум *разным* собственным числам μ и μ', то эти функции будут ортогональны друг другу.

Теорема. *(Гильберта-Шмидта) Пусть A — линейный ограниченный компактный самосопряженный оператор в H — сепарабельном гильбертовом пространстве. Ну тут понятно*

Теперь вернемся к нашему вопросу: какая из альтернатив для Δ имеет место быть? Принимая во внимание теорему Гильберта-Шмидта, становится очевидно, что вторая.

λ_1 всегда соответствует одномерное пространство собственных функций

Что происходит?

Раз $\mu u = Ku + g$, то u можно представить как

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} c_i u_i \tag{104}$$

Кроме того, так как g — тоже элемент пространства, можем разложить и его:

$$g = \sum_{i=1}^{\infty} d_i u_i \tag{105}$$

Для простоты можем отнормировать что именно. Давайте подставим это в уравнение (1'):

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu c_i u_i = \sum_{i=1}^{\infty} c_i K u_i + \sum_{i=1}^{\infty} d_i u_i \tag{106}$$

Можем объеденить это все под одним знаком суммы и получить следующее красивое соотношение:

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i(\mu - \mu_i) u_i = \sum_{i=1}^{\infty} d_i u_i \tag{107}$$

Справа и слева находятся какие-то функциональные ряды — разложение одного и того элемента в ряд Фурье по базису u_i. Разложение по такому базису единственно, следовательно равенство может достигаться только при равенстве соответствующих коэффициентов. Так, для каждого i:

$$c_i(\mu - \mu_i) = d_i \tag{108}$$

откуда можем получить следующую формулу для коэффициентов разложения в ряд Фурье:

$$\boxed{c_i = \frac{d_i}{\mu - \mu_i}} \tag{109}$$

Разложение u в ряд Фурье будет иметь следующий вид:

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_i}{\mu - \mu_i} u_i = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(g, u_i)}{\mu - \mu_i} u_i \tag{110}$$

Так, если мы находимся в «хорошем» (нерезонансном) случае альтернативы Фредгольма, мы не только знаем, что наше решение уравнения (1) устойчиво — мы можем выписать для него явную формулу:

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-\Delta^{-1} f, u_i)}{-\lambda/\lambda_i} u_i \tag{111}$$

Но что делать в нерезонансном случае, то есть, если $\lambda = \lambda_j$ (и соответственно, $\mu = \mu_j$)? Тогда *все* d_j, соответствующие μ_j, должны быть равны нулю. Иными словами, $(g, v) = 0$ для любой собственной функции v, соответствующей μ_j.

Тут был какой-то итог

Хочется научиться выбирать базис для пространства $H_0^1(\Omega)$. Как это делать?

Пусть $\{u_k\}$ — базис в $C(\Omega)$, но полная ОС он только в L^2 щито?. Определим новое скалярное произведение в $H_0^1(\Omega)$:

$$[u, w] \coloneqq \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla w \tag{112}$$

Мы уже вводили похожее понятие, когда определяли норму в $H_0^1(\Omega)$.

Распишем:

$$[u_k, u_l] = \int_\Omega \nabla u_k \cdot \nabla u_l = -\int_\Omega u_k \Delta u_l \tag{113}$$

Последнее равенство справедливо в силу чего-то, что было не разобрать на свежепомытой доске

Извините, слишком много воды

НИХУЯ НЕ ВИДНО

Давайте разделим u_k на $\sqrt{\lambda_k}$ и назовем это w_k. Понятно, что w_k — это тоже базис, ортонормированный в смысле скалярного произведения $[\bullet, \bullet]$ и, следовательно, тоже базис в L^2.

Теорема. *$\{w_k\}$ — базис в $H_0^1(\Omega)$.*

Доказательство. Почему-то осталось доказать, что $\{u_k\}$ (sic!) — полная система, то есть если $[u, w_k] = 0$ для любого k, то $u = 0$.

Посчитаем $[u, w_k]$:

$$[u, w_k] = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla w_k = -\int_\Omega u \cdot \Delta w_k = -\sqrt{\lambda_k} \int_\Omega u u_k = 0 \tag{114}$$

□

Что-то пропущено?

Если $h \in H_0^1(\Omega)$, то сходимость имеетя не только в $L^2(\Omega)$, но и в H^1 (то есть базис мы построили более сильный).

Поговорим о свойствах первого собственного числа.

кейс про мембрану барабана

Взглянем на $u \in H_0^1(\Omega)$:

$$\begin{aligned} [u, u] &= \int_\Omega |\nabla u|^2 = \int_\Omega \left| \nabla \sum_k c_k u_k \right|^2 = \int_\Omega \left| \sum_k c_k \nabla u_k \right|^2 \\ &= \sum_k c_k^2 \int_\Omega |\nabla u_k|^2 = \sum_k c_k^2 \lambda_k \geqslant \lambda_1 \sum_k c_k^2 = \lambda_1 \|u\|_2^2 \end{aligned} \tag{115}$$

небольшой пропуск

Теорема.

$$\lambda_1 = \min\{\int_\Omega |\nabla u|^2, u \in H_0^1(\Omega), \|u\|_2 = 1\} \tag{116}$$

я заебался :(