# Ответы на вопросы экзамена по АТЧ

**(январь 2017 г., 3-й семестр ПМиИ)**

А. Константинов, О. Евсеев, Г. Енгалыч

10 января 2017 г.

# Часть IX.

# Евклидовы и унитарные пространства

## 9.1. Определение евклидова пространства. Неравенства Коши и треугольника в ЕП

**Определение.** *Евклидово пространство* — пара $({}_{\mathbb{R}}L, (-,-))$, где ${}_{\mathbb{R}}L$ — **конечномерное** пространство, $(-,-)\colon L^2 \to \mathbb{R}$ — положительно определенная билинейная форма.

Величина $||u|| \coloneqq \sqrt{(u,u)}$ называется *длиной (нормой) вектора $u$.*

Величина $\rho(u,v) = ||u-v||$ называется *расстоянием* между $u$ и $v$.

**Теорема.** *$L$ — ЕП. Пусть $u, v \in L$. Тогда:*

*а)* $|(u,v)| \leq ||u|| \cdot ||v||$

*б)* $||u+v|| \leq ||u|| + ||v||$

*в)* $\rho(u,v) \leq \rho(u,w) + \rho(w,v)\ \forall w \in L$

*Доказательство.*

**а)** Пусть $t \in \mathbb{R}$. Считаем, что $u \neq \mathbf{0} \neq v$. Тогда $(u+tv, u+tv) = (u,u) + 2(u,tv) + (tv,tv) = ||u||^2 + 2t(u,v) + t^2||v||^2 > 0\ \forall t$, откуда $D = 4(u,v)^2 - 4||u||^2||v||^2 \leq 0$ и $|(u,v)| \leq ||u|| \cdot ||v||$.

**б)** $||u+v||^2 = (u+v, u+v) = ||u||^2 + 2(u,v) + ||v||^2 \leq ||u||^2 + 2||u|| \cdot ||v|| + ||v||^2 = (||u|| + ||v||)^2$

**в)** $\rho(u,v) = ||u-v|| = ||(u-w)+(w-v)|| \leq ||u-w|| + ||w-v|| = \rho(u,w) + \rho(w,v)$

□

## 9.2. Матрица Грама набора векторов. Связь с линейной независимостью векторов

**Определение.** Пусть $M = \{v_i\}_{i=1}^m$ — семейство векторов ЕП $L$. Матрица $G_M = ((v_i, v_j))_{ij}$ (где $i, j \in 1..m$) называется *матрицей Грама* семейства $M$.

*Замечание.* Ясно, что $G_M$ симметрична. Если $M = \{e_i\}_{i=1}^m$ — базис, то $G_M = (g_{ij})$ является матрицей скалярного произведения (то есть, для $u, v \in L$ скалярное произведение выражается в виде $(u,v) = U^T G_M V$ в силу того, что $(u,v) = \sum_{i,j=1}^m g_{ij} u_i v_j$).

**Теорема.** *$L$ — ЕП, $M = \{v_i\}_{i=1}^m$ — семейство векторов $L$. $M$ линейно независимо $\Leftrightarrow$ матрица Грама $G_M$ обратима.*

*Доказательство.*

**а)** $(\Rightarrow)$ Предположим, что $G_M$ необратима. Тогда уравнение $G_M X = \mathbf{0}$ имеет ненулевое решение $X = (x_1, \ldots, x_m)^T \neq \mathbf{0}$. Положим $u \coloneqq \sum_{i=1}^m x_i v_i \neq \mathbf{0}$ (по линейной независимости) $\Rightarrow (u,u) = X^T G_M X = X^T \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0} \Rightarrow u = \mathbf{0}$. Полученное противоречие доказывает обратимость $G_M$.

**б)** $(\Leftarrow)$ Предположим, что $\sum_{i=1}^m x_i v_i = \mathbf{0}$. Домножив скалярно обе части на вектор $v_j$, получим $\sum_{i=1}^m x_i g_{ij} = 0\ \forall j$. Отсюда $X^T G_M = \mathbf{0}$. После домножения справа на $G_M^{-1}$ получаем $X^T = \mathbf{0} \Rightarrow \forall i\ x_i = 0$. Отсюда $M$ линейно независимо.

□

## 9.3. Теорема о существовании ОНБ в ЕП

**Теорема.** *Пусть $L$ — евклидово пространство. Тогда в нем существует ортонормированный базис $\{v_i\}_{i=1}^n$.*

*Доказательство.* Пусть $\{u_i\}_{i=1}^n$ — **произвольный** базис $L$. Произведем индукцию по $n$.

$\underline{n=1}$. $\{v_1 = \frac{u_1}{||u_1||}\}$ — ОН-базис.

$\underline{n-1 \to n}$. Пусть $U \coloneqq \langle u_1, \dots, u_{n-1}\rangle \leq L$ — $(n-1)$-мерное подпространство $L$. По индукционному предположению в нем можно выбрать ОН-базис $\{v_i\}_{i=1}^{n-1}$.

Пусть $v \coloneqq u_n - \sum_{i=1}^{n-1}(u_n, v_i)v_i$. Тогда $\forall k = 1..n-1$ имеем:

$$(v, v_k) = \left(u_n - \sum_{i=1}^{n-1}(u_n, v_i)v_i, v_k\right) = (u_n, v_k) - \sum_{i=1}^{n-1}(u_n, v_i)(v_i, v_k) \overset{\text{ОН-ть}}{=} (u_n, v_k) - (u_n, v_k)\underbrace{(v_k, v_k)}_{=1} = 0$$

Можем дополнить ОН-базис $U$ до ОН-базиса $V$, положив $v_n = \frac{v}{||v||}$. □

## 9.4. Матрица перехода между ОНБ в ЕП

**Теорема.** *$L$ — ЕП. Пусть $B = \{u_i\}_{i=1}^n$ и $B' = \{u_i'\}_{i=1}^n$ — ОНБ, причем $B \overset{C}{\rightsquigarrow} B'$. Тогда $C = (c_{ij})$ ортогональна.*

*Доказательство.*

$$\delta_{ij} = (u_i', u_j') = \left(\sum_{k=1}^n c_{ki}u_k, \sum_{t=1}^n c_{tj}u_t\right) = \sum_{k,t=1}^n c_{ki}c_{tj}\underbrace{(u_k, u_t)}_{\delta_{kt}} = \sum_{s=1}^n \underbrace{c_{si}}_{C^T[i,s]} \cdot \underbrace{c_{sj}}_{C[s,j]} = C^TC[i,j]$$

Так как $C^TC = E_n$, то $C$ — ортогональная матрица. □

## 9.5. Свойства ортогонального дополнения в ЕП

**Определение.** $L$ — ЕП, $V \leq_{\mathbb{R}} L$. Подпространство $V^\perp = \{x \in L \mid \forall v \in V\ (v, x) = 0\} \leq L$ называется *ортогональным дополнением* к $V$.

**Теорема.** *$L$ — ЕП. Пусть $V, V_1, V_2 \leq_{\mathbb{R}} L$. Справедливы следующие утверждения:*

*а)* $V_1 \subset V_2 \Rightarrow V_2^\perp \subset V_1^\perp$

*б)* $(V_1 + V_2)^\perp = V_1^\perp \cap V_2^\perp$

*в)* $L = V \oplus V^\perp$

*г)* $(V^\perp)^\perp = V$

*д)* $(V_1 \cap V_2)^\perp = V_1^\perp + V_2^\perp$

*Доказательство.*

**а)** Рассмотрим произвольный $v_2' \in V_2^\perp$. Имеем $\forall v_2 \in V_2\ (v_2, v_2') = 0 \Rightarrow \forall v_1 \in V_1\ (v_1, v_2') = 0$. При этом $\forall v_1 \in V_1\ \forall v_1' \in V_1^\perp\ (v_1, v_1') = 0$. Так как $V_1^\perp$ максимально по включению, $V_2^\perp \subset V_1^\perp$.

**б)** $V_1, V_2 \subset V_1 + V_2 \overset{(a)}{\Rightarrow} (V_1+V_2)^\perp \subset V_1^\perp \cap V_2^\perp$. В то же время, пусть $u \in V_1^\perp \cap V_2^\perp$ и $v = v_1 + v_2 \in V_1 + V_2$, тогда $(u, v) = (u, v_1) + (u, v_2) = 0 + 0 = 0 \rightsquigarrow u \in (V_1 + V_2)^\perp$ и обратное включение доказано.

**в)** Считаем, что $V \neq \{\mathbf{0}\}$. Выберем в $V$ ОН-базис $\{e_i\}_{i=1}^k$ и дополним его до ОН-базиса $L$: $\{e_i\}_{i=1}^n$. Докажем, что $V^\perp = \langle e_{k+1}, \dots, e_n\rangle$. Пусть $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \in V^\perp$. Тогда $\forall j \leq k$ имеем $0 = (e_j, v) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(e_i, e_j) = \sum_{i=1}^n \alpha_i\delta_{ij} = \alpha_j$, откуда $v \in \langle e_{k+1}, \dots, e_n\rangle$.

Докажем обратное включение: положим $u = \sum_{i=1}^k \alpha_i e_i \in V$, $v = \sum_{j=k+1}^n \alpha_j e_j \in \langle e_{k+1}, \dots, e_n\rangle$. Тогда $(u, v) = (\sum_{i=1}^k \alpha_i e_i, \sum_{j=k+1}^n \alpha_j e_j) = \sum_{i=1}^k \alpha_i(e_i, \sum_{j=k+1}^n \alpha_j e_j) = \sum_{i=1}^k \alpha_i(\sum_{j=k+1}^n \alpha_j(e_i, e_j)) = 0$ и $u \in V^\perp$.

Так, $V = V \oplus V^\perp$ (данная сумма прямая в силу того, что если $x \in X \cap X^\perp$, то $(x, x) = 0$ и $x = \mathbf{0}$).

**г)** $L = V \oplus V^{\perp}$. Выделяя несобственные подпространства в $V$ и $V^{\perp}$ и применяя пункт (в), получаем $L = V^{\perp} \oplus V^{\perp\perp}$. При этом $\dim_{\mathbb{R}} V = \dim_{\mathbb{R}} V^{\perp\perp}$ и очевидно, что $V \subset V^{\perp\perp}$, откуда $V = V^{\perp\perp}$.

**д)** $(V_1 \cap V_2)^{\perp} \overset{(б)}{=} (V_1^{\perp} + V_2^{\perp})^{\perp\perp} \overset{(г)}{=} V_1^{\perp} + V_2^{\perp}$.

□

## 9.6. Обобщенная теорема Пифагора

**Теорема.** *$L$ — ЕП. Пусть $\{v_i\}_{i=1}^m$ — ортогональный набор векторов $L$. Тогда $\|\sum_{i=1}^m v_i\|^2 = \sum_{i=1}^m \|v_i\|^2$.*

*Доказательство.*

$$\left\|\sum_{i=1}^m v_i\right\|^2 = \left(\sum_{i=1}^m v_i,\ \sum_{j=1}^m v_j\right) = \sum_{i,j=1}^m (v_i, v_j) = \sum_{i=1}^m (v_i, v_i) = \sum_{i=1}^m \|v_i\|^2$$

□

## 9.7. Линейные функционалы на линейном пространстве. Дуальный базис

**Определение.** $K$ — поле, ${}_K V$ — линейное пространство. ${}_K V^* := {}_K \operatorname{Hom}(V, K)$ называется *пространством функционалов (также дуальным, двойственным, сопряженным пространством)* на $V$.

**Теорема 1.** $\dim_K V < \infty \Rightarrow \dim_K V^* = \dim_K V$.

*Доказательство.* $\dim_K V^* = \dim_K \operatorname{Hom}(V, K) = \dim_K V \cdot \dim_K K = \dim_K V$. □

**Определение.** Пусть $B = \{u_i\}_{i=1}^n$ — базис ${}_K V$. *Дуальным* к $B$ называется базис $B^* = \{\varphi_j\}_{j=1}^n$ пространства $V^*$ такой, что $\varphi_j(u_i) = \delta_{ij}$.

**Теорема 2.** *$B^*$ — действительно базис ${}_K V^*$.*

*Доказательство.* Пусть $\varphi \in V^*$.

$$\begin{aligned}
\varphi(v) = \varphi\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i u_i\right) &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi(u_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \sum_{j=1}^n \varphi(u_j)\varphi_j(u_i) \\
&= \sum_{j=1}^n \varphi(u_j) \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_j(u_i) = \sum_{j=1}^n \varphi(u_j)\varphi_j\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i u_i\right) = \sum_{j=1}^n \varphi(u_j)\varphi_j(v)
\end{aligned}$$

Отсюда $\varphi \in {}_K\langle B^* \rangle$. Так как $\# B^* = \dim_K V^*$, то $B^*$ — базис $V^*$. □

## 9.8. Дуальное отображение. Свойства операции перехода к дуальному отображению. Второе пространство функционалов, его связь с исходным пространством

**Определение.** Пусть $f\colon {}_K U \to {}_K V$ — $K$-линейное отображение. Построим $f^*\colon V^* \to U^*$ следующим образом:

$$\begin{tikzcd} U \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, dashed, "f^*(\varphi)"'] & & V \arrow[dl, "\varphi"] \\ & K & \end{tikzcd}$$

То есть, для $\varphi \in V^*$ положим $f^*(\varphi) \coloneqq \varphi \circ f \in U^*$. Очевидно, что оно $K$-линейно. $f^*$ называется *дуальным к $f$* отображением.

*Замечание.* Дуальное отображение обладает следующими свойствами:

а) $(f_1 + f_2)^*(\varphi) = \varphi \circ (f_1 + f_2) = \varphi \circ f_1 + \varphi \circ f_2 = f_1^*(\varphi) + f_2^*(\varphi)$

б) $(gf)^*(\varphi) = \varphi(gf) = (\varphi g)f = f^*(\varphi g) = f^*(g^*(\varphi)) = (f^* \circ g^*)(\varphi)$

**Определение.** ${}_KV$ — линейное пространство. Построим отображение $\delta_V \colon V \to V^{**}$ так, чтобы $\forall \varphi \in V^*$ $(\delta_V(v))(\varphi) = \varphi(v)$ $(\delta_V(v) = \bullet(v))$.

**Теорема.** *${}_KU$, ${}_KV$ — линейные пространства.*

*а) $\delta_V$ — изоморфизм.*

*б) Пусть $f \colon U \to V$ — $K$-линейное отображение, тогда $\delta_V \circ f = f^{**} \circ \delta_U$.*

*Замечание.* $\delta$ можно рассматривать как функтор в терминах теории категорий (следующая диаграмма коммутирует):

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\delta_U"', "\sim"] & V \arrow[d, "\delta_V", "\sim"'] \\ U^{**} \arrow[r, "f^{**}"] & V^{**} \end{tikzcd}$$

*Доказательство.*

**а)** Докажем, что $\delta_V$ мономорфно. Пусть $v \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$ и $\delta_V(v) \equiv 0$. Тогда $\forall \varphi \in V^*$ $\varphi(v) = 0$. Построим базис $\{v, \dots\}$ и двойственный к нему $\{\varphi_1, \dots\}$. Отсюда по определению $\varphi_1(v) = 1$. Полученное противоречие доказывает мономорфность $\delta_V$. Так как $\delta_V$ — мономорфизм пространств одинаковой размерности, то $\delta_V$ — изоморфизм.

**б)**

$$\begin{aligned} ((\delta_V \circ f)(u))(\varphi) &= (\delta_V(f(u)))(\varphi) = \varphi(f(u)) = (\varphi \circ f)(u) = (f^*(\varphi))(u) = (\delta_U(u))(f^*(\varphi)) \\ &= (\delta_U(u) \circ f^*)(\varphi) = (f^{**}(\delta_U(u)))(\varphi) = (f^{**} \circ \delta_U(u))(\varphi) \end{aligned}$$

Так, $\delta_V \circ f = f^{**} \circ \delta_U$.

□

## 9.9. Линейные функционалы на ЕП

**Определение.** $L$ — ЕП. Пусть $v \in L$. Отображение $\varphi_v \colon L \to \mathbb{R}$, т.ч. $\varphi_v(u) = (u, v)$ назовем *функционалом скалярного умножения* на $v$.

**Теорема.** *$L$ — ЕП. Рассмотрим $f \colon L \to L^*$, т.ч. $f(v) = \varphi_v$. Справедливо следующее:*

*а) $f$ — изоморфизм.*

*б) Если $B$ — ОН-базис ${}_{\mathbb{R}}V$, то $f(B)$ — дуальный к нему в ${}_{\mathbb{R}}L^*$.*

*Доказательство.*

**а)** Отображение $f$ $K$-линейно за счет линейности скалярного произведения по первому аргументу. Докажем мономорфность $f$. Пусть $f(v) = 0$ для $v \in L$. Тогда $(\bullet, v) \equiv 0 \rightsquigarrow (v, v) = 0 \rightsquigarrow v = \mathbf{0}$. Так как $\dim_{\mathbb{R}} L^* = \dim_{\mathbb{R}} L$, то $f$ — мономорфизм $K$-линейных пространств одинаковой размерности, и, как следствие, является изоморфизмом.

**б)** Пусть $B = \{e_i\}_{i=1}^n$. Тогда $f(B) = \{\varphi_j = (\bullet, e_j)\}_{j=1}^n$. В частности, $\varphi_j(e_i) = (e_i, e_j) = \delta_{ij}$, откуда $f(B)$ — дуальный к $B$ базис $L^*$.

□

**Следствие.** *$L$ — ЕП. Пусть $\varphi\colon {}_{\mathbb{R}}L \to \mathbb{R} \in L^*$, тогда $\exists! v \in L\colon \varphi(u) = (u, v)\ \forall u \in L$.*

## 9.10. Проекторы в линейных пространствах

**Определение.** ${}_K V$ — линейное пространство. Эндоморфизм $p \in \operatorname{End}_K V$ называется *проектором (оператором проектирования)*, если $p^2 = p$.

*Пример.*

$$\begin{array}{ccccc} {}_K V & = & U & \oplus & U' \\ \Cup & & \Cup & & \Cup \\ v & = & u & + & u' \end{array}$$

$p_U(v) \coloneqq u$ — проектор, называемый *проектором на $U$ параллельно $U'$*.

**Теорема.** *Пусть $p \in \operatorname{End}_K V$ — проектор. Тогда:*

*а) $V = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Im} p$.*

*б) $p$ совпадает с проектором на $\operatorname{Im} p$ параллельно $\operatorname{Ker} p$.*

*Доказательство.*

**а)** Пусть $v \in V$. Тогда $p(v) = p^2(v)$. Положим $y \coloneqq v - p(v)$. Ясно, что $p(y) = \mathbf{0}$. Так:

$$v = p(v) + y, \qquad p(v) \in \operatorname{Im} p,\ y \in \operatorname{Ker} p \tag{$*$}$$

откуда $V = \operatorname{Im} p + \operatorname{Ker} p$. Пусть $x \in \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Im} p$, тогда $\exists z \in V\colon x = p(z)$ и $p(x) = \mathbf{0}$. Отсюда $\mathbf{0} = p(x) = p^2(z) = p(z) = x$. Следовательно, $\operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Im} p = \{\mathbf{0}\}$ и соответствующая сумма прямая.

**б)** Явным образом следует из $(*)$.

□

## 9.11. Ортогональное проектирование на подпространство

**Определение.** $L$ — ЕП, $V \le {}_{\mathbb{R}}L$, $L = V \oplus V^{\perp}$. Проектор на $V$ параллельно $V^{\perp}$ называется *оператором ортогонального проектирования на $V$*. В этом случае $v \in L$ единственным образом представляется в виде $v = v_{\text{pr}} + v^{\perp}$, где $v_{\text{pr}}$ называется *ортогональной проекцией $v$ на $V$*, а $v^{\perp}$ — *ортогональной составляющей $v$*.

**Определение.** $L$ — ЕП, $V \le {}_{\mathbb{R}}L$, $v \in L$. Величина $\rho(v, V) \coloneqq \inf\{\rho(v, x) \mid x \in V\}$ называется *расстоянием между $v$ и $V$*.

**Теорема.** *$L$ — ЕП, $V \le {}_{\mathbb{R}}L$, $v \in L$. Пусть $p$ — оператор ортогонального проектирования на $V$, тогда $\rho(v, V) = \left\|v^{\perp}\right\| = \|v - p(v)\|$.*

*Доказательство.* Положим $v_{\text{pr}} \coloneqq p(v) \in V$. Очевидно, что $\rho(v, V) \le \left\|v^{\perp}\right\|$ (т.к. $\rho(v, v_{\text{pr}}) = \|v - v_{\text{pr}}\| = \left\|v^{\perp}\right\|$). В то же время, полагая $u \in V$, имеем $\rho^2(v, u) = \|v - u\|^2 = \left\|v^{\perp} + (v_{\text{pr}} - u)\right\|^2 = \left\|v^{\perp}\right\|^2 + \|v_{\text{pr}} - u\|^2 \ge \left\|v^{\perp}\right\|^2$ (в силу ортогональности векторов суммы), откуда $\rho(v, V) \ge \left\|v^{\perp}\right\|$. Так, $\rho(v, V) = \left\|v^{\perp}\right\|$. □

## 9.14. Определение унитарного пространства. Неравенства Коши и треугольника в УП

**Определение.** *Унитарным пространством* называется пара $({}_{\mathbb{C}}L, F)$, где ${}_{\mathbb{C}}L$ — **конечномерное** $\mathbb{C}$-линейное пространство, а $F\colon L^2 \to \mathbb{C}$ — положительно определенная **эрмитова** форма (*скалярное произведение*). Аналогично ЕП вводятся понятия *нормы* вектора и *расстояния* между двумя векторами.

**Теорема.** *$L$ — УП. Пусть $u, v \in L$. Тогда:*

*а)* $|(u,v)| \leq ||u|| \cdot ||v||$

*б)* $||u+v|| \leq ||u|| + ||v||$

*в)* $\rho(u,v) \leq \rho(u,w) + \rho(w,v)\ \forall w \in L$

*Доказательство.*

**а)** Пусть $t \in \mathbb{C}$. Считаем, что $v \neq \mathbf{0}$. Тогда $0 \leq (u+tv, u+tv) = \|u\|^2 + t(v,u) + \bar{t}(u,v) + |t|^2\|v\|^2$. Положим $t = \lambda(u,v),\ \lambda \in \mathbb{R}$. Тогда $0 \leq \|u\|^2 + 2\lambda|(u,v)|^2 + \lambda^2|(u,v)|^2\|v\|^2$. В таком случае $D = 4|(u,v)|^4 - 4|(u,v)|^2\|u\|^2\|v\|^2 \leq 0$, откуда $|(u,v)| \leq \|u\| \cdot \|v\|$

**б)** Аналогично доказательству для ЕП.

**в)** Аналогично доказательству для ЕП.

□

## 9.15. Существование ОНБ в УП. Матрица перехода между ОНБ в УП

**Теорема 1.** *Пусть ${}_{\mathbb{C}}L$ — УП, тогда существует ОН-базис $\{v_i\}_{i=1}^n$ в ${}_{\mathbb{C}}L$.*

*Доказательство.* Аналогично случаю ЕП (процесс Грама-Шмидта). □

**Определение.** Матрица $C \in M_n(\mathbb{C})$ называется *унитарной*, если $C^{-1} = \bar{C}^T$ ($=: C^*$ — *эрмитово сопряженная матрица*).

**Теорема.** *Пусть ${}_{\mathbb{C}}L$ — УП, $B$ и $B'$ — ОНБ в ${}_{\mathbb{C}}L$, причем $B \overset{C}{\rightsquigarrow} B'$. Тогда $C$ — унитарная матрица.*

*Доказательство.* Пусть $B = \{u_i\}_{i=1}^n$ и $B' = \{u_i'\}_{i=1}^n$, $C = (c_{ij})$. Тогда:

$$\delta_{ij} = (u_i', u_j') = \left(\sum_{k=1}^n c_{ki}u_i,\ \sum_{t=1}^n c_{tj}u_j\right) = \sum_{k,t=1}^n c_{ki}\overline{c_{tj}}\underbrace{(u_i,u_j)}_{\delta_{ij}} = \sum_{s=1}^n \underbrace{c_{si}}_{C[s,i]} \cdot \underbrace{\overline{c_{sj}}}_{\bar{C}^T[j,s]} = C^*C[j,i]$$

Так, $C^*C = E_n$, откуда $C$ унитарна. □

## 9.16. Линейные функционалы на УП

**Определение.** Пусть ${}_{\mathbb{C}}L$ — УП, $v \in L$. Отображение $\varphi_v\colon L \to \mathbb{C}$, т.ч. для $u \in L$ $\varphi_v(u) = (u,v)$ назовем *функционалом скалярного умножения на $v$*. Ясно, что $\varphi_v \in L^*$.

**Определение.** ${}_{\mathbb{C}}L$ — $C$-линейное пространство. На $L$ введем прежнее сложение и новое умножение на скаляры $\mu$, т.ч. $\mu(\alpha, v) \coloneqq \bar{\alpha}v$. Ясно, что $(L, +, \mu) =: \bar{L}$ — $\mathbb{C}$-линейное пространство.

**Теорема.** *Пусть ${}_{\mathbb{C}}L$ — УП. Рассмотрим отображение $f\colon \bar{L} \to L^*$, т.ч. $f(v) = \varphi_v$. Справедливы следующие утверждения:*

*а) $f$ — изоморфизм.*

*б) Если $B$ — ОН-базис в ${}_{\mathbb{C}}\bar{L}$, то $f(B)$ — дуальный к нему базис в $L^*$.*

*Доказательство.*

**а)**

$$f(u+v) = (\bullet, u+v) = (\bullet, u) + (\bullet, v) = f(u) + f(v)$$

$$f(\mu(\alpha, v)) = (\bullet, \bar{\alpha}v) = \bar{\bar{\alpha}}(\bullet, v) = \alpha(\bullet, v) = \alpha f(v)$$

Отсюда $f$ — $\mathbb{C}$-линейное отображение. Предположим, что $f(v) = 0$, то есть $\forall u \in L$ $(u, v) = 0$, тогда $(v, v) = 0 \rightsquigarrow v = \mathbf{0} \rightsquigarrow \operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0}\}$ и $f$ — мономорфизм. Но $\dim_{\mathbb{C}} \bar{L} = \dim_{\mathbb{C}} L^*$, и $f$ — изоморфизм.

**б)** Пусть $B = \{e_i\}_{i=1}^n$. Тогда $f(B) = \left\{\varphi_{e_j} = (\bullet, e_j)\right\}_{j=1}^n$. Но $\varphi_{e_j}(e_i) = (e_i, e_j) = \delta_{ij}$, откуда $f(B)$ — дуальный к $B$ базис $L^*$.

□

## 9.17. Сопряженные операторы в ЕП, их свойства

**Определение.** Пусть ${}_{\mathbb{R}}L$ — ЕП, $a \in \operatorname{End}_{\mathbb{R}} L$. Положим $f\colon L \to L^*$ — изоморфизм, т.ч. $v \mapsto \varphi_v = (\bullet, v)$; также положим $a^*\colon L^* \to L^*$ — дуальное к $a$ отображение ($a^*(\varphi) = \varphi \circ a$). Оператор $\hat{a}\colon f^{-1} \circ a^* \circ f\colon L \to L$ назовем *сопряженным* к $a$.

*Замечание.* Определение наглядно описывается следующей диаграммой:

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "\hat{a}"] \arrow[d, "f"'] & L \\
L^* \arrow[r, "a^*"] & L^* \arrow[u, "f^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

**Теорема 1.** *$L$ — ЕП. Пусть $a, b \in \operatorname{End}_{\mathbb{R}} L$. Тогда:*

*а) $\widehat{a+b} = \hat{a} + \hat{b}$.*

*б) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ $\widehat{\alpha a} = \alpha \hat{a}$.*

*в) $\widehat{ab} = \hat{b}\hat{a}$.*

*г) Если $a$ обратим, то $\hat{a}$ обратим и $\hat{a}^{-1} = \widehat{a^{-1}}$.*

*Доказательство.*

**а)**

$$\widehat{a+b} = f^{-1} \circ (a+b)^* \circ f = f^{-1} \circ (a^* + b^*) \circ f = f^{-1} \circ a^* \circ f + f^{-1} \circ b^* \circ f = \hat{a} + \hat{b}$$

**б)**

$$\widehat{\alpha a} = f^{-1} \circ (\alpha a)^* \circ f = \alpha f^{-1} \circ a^* \circ f = \alpha \hat{a}$$

**в)**

$$\widehat{ab} = f^{-1} \circ (ab)^* \circ f = f^{-1} \circ (b^* a^*) \circ f = (f^{-1} \circ b^* \circ f) \circ (f^{-1} \circ a^* \circ f) = \hat{b}\hat{a}$$

**г)** Ясно, что $(\mathrm{id}_V)^* = \bullet \circ \mathrm{id}_V = \bullet = \mathrm{id}_{V^*}$. Тогда $\widehat{\mathrm{id}_V} = \mathrm{id}_V$, откуда $\mathrm{id}_V = \widehat{a \circ a^{-1}} = \widehat{a^{-1}} \circ \hat{a}$.

□

**Теорема 2.** *Пусть $L$ — ЕП, $a \in \operatorname{End}_{\mathbb{R}} L$. Тогда $\forall u, v \in L$ $(a(u), v) = (u, \hat{a}(v))$.*

*Доказательство.* Имеем $f \circ \hat{a} = a^* \circ f$, откуда $\forall v \in L$ $f(\hat{a}(v)) = a^*(f(v))$. Но $f(\hat{a}(v)) = (\bullet, \hat{a}(v))$, $a^*(f(v)) = (a(\bullet), v)$, следовательно $\forall u \in L$ $(u, \hat{a}(v)) = (a(u), v)$. $\square$

**Следствие 1.** *Справедливы следующие утверждения:*

*а)* $\hat{\hat{a}} = a$.

*б) Из обратимости* $\hat{a}$ *следует обратимость* $a$.

*Доказательство.*

**а)** $(a(u), v) = (u, \hat{a}(v)) = (\hat{\hat{a}}(u), v) \rightsquigarrow \forall v \in L$ $(a(u) - \hat{\hat{a}}(u), v) = 0 \rightsquigarrow a(u) = \hat{\hat{a}}(u)$ $\forall u \in L$.

**б)** Из обратимости $\hat{a}$ следует обратимость $\hat{\hat{a}} = a$.

$\square$

**Следствие 2.** $L$ *— ЕП,* $a \in \operatorname{End}_{\mathbb{R}} L$. *Пусть* $V \leq_{\mathbb{R}} L$, *тогда* $V$ *a-инвариантно в том и только в том случае, когда* $V^{\perp}$ $\hat{a}$*-инвариантно.*

*Доказательство.*

**а)** $(\Rightarrow)$ Пусть $x \in V, y \in V^{\perp}$. Тогда $0 = (a(x), y) = (x, \hat{a}(y))$, откуда $\hat{a}(y) \in V^{\perp}$.

**б)** $(\Leftarrow)$ Следует из применения $(\Rightarrow)$ к $\hat{a}$ и $V^{\perp}$, так как $\hat{\hat{a}} = a$ и $V^{\perp\perp} = V$.

$\square$

**Следствие 3.** *Справедливы следующие утверждения:*

*а)* $\operatorname{Ker} \hat{a} = (\operatorname{Im} a)^{\perp}$.

*б)* $\operatorname{Im} \hat{a} = (\operatorname{Ker} a)^{\perp}$.

*Доказательство.*

**а)**

$$x \in \operatorname{Ker} \hat{a} \Leftrightarrow \forall u \in L \ (u, \hat{a}(x)) = 0 \Leftrightarrow x \in (\operatorname{Im} a)^{\perp}$$

**б)**

$$\operatorname{Ker} a = \operatorname{Ker} \hat{\hat{a}} = (\operatorname{Im} \hat{a})^{\perp} \Rightarrow \operatorname{Im} \hat{a} = (\operatorname{Ker} a)^{\perp}$$

$\square$

**Следствие 4.** *Справедливы следующие утверждения:*

*а)* $\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Ker} a = \dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Ker} \hat{a}$.

*б)* $\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Im} a = \dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Im} \hat{a}$.

*Доказательство.* Из предыдущего следствия имеем:

$$L = \operatorname{Ker} \hat{a} \oplus \operatorname{Im} a = \operatorname{Ker} a \oplus \operatorname{Im} \hat{a}$$

откуда

$$\begin{cases} \dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Ker} \hat{a} + \dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Im} a = \dim_{\mathbb{R}} L \\ \dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Ker} a + \dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Im} \hat{a} = \dim_{\mathbb{R}} L \\ \dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Ker} a + \dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Im} a = \dim_{\mathbb{R}} L \end{cases}$$

и соответствующие равенства очевидны. $\square$

**Теорема 3.** $L$ *— ЕП,* $a \in \operatorname{End}_{\mathbb{R}} L$. *Пусть* $B = \{e_i\}_{i=1}^n$ *— ОН-базис* ${}_{\mathbb{R}}L$ *и пусть* $[a]_B = A = (a_{ij})$. *Тогда* $[\hat{a}]_B = A^T$.

*Доказательство.* Пусть $[\hat{a}]_B = D = (d_{ij})$. Имеем $\forall j$ $\hat{a}(e_j) = \sum_{i=1}^n d_{ij} e_i$ и $\forall j$ $a(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i$. Но $d_{ij} = (\hat{a}(e_j), e_i) = (e_j, a(e_i)) = a_{ji}$, откуда $D = A^T$. $\square$

**Следствие.** *В предыдущих обозначениях:*

*а)* $\chi_a = \chi_{\hat{a}}$.

*б)* $\operatorname{sp}(\hat{a}) = \operatorname{sp}(a)$.

## 9.18. Сопряженные операторы в УП

**Определение.** ${}_{\mathbb{C}}L$ — УП, $a \in \operatorname{End}_{\mathbb{C}} L$. *Сопряженным к $a$* назовем оператор $\hat{a}$, т.ч. $\forall u, v \in L$ $(a(u), v) = (u, \hat{a}(v))$.

*Замечание.* Пусть $v \in L$. Рассмотрим отображение $\psi_v \colon L \to \mathbb{C}$, т.ч. $\psi_v(u) = (a(u), v)$. Ясно, что $\psi_v \in L^*$. Тогда $\exists! \tilde{v} \colon \psi_v = \varphi_{\tilde{v}} = (\bullet, \tilde{v})$. Положим $\hat{a}(v) \coloneqq \tilde{v}$. Таким образом мы предъявим явную конструкцию сопряженного оператора.

Предположим, что существует оператор $\tilde{a}$, т.ч. $(a(u), v) = (u, \tilde{a}(v))$ $\forall u, v \in L$. Тогда $\forall u, v \in L$ имеем $(u, \tilde{a}(v)) = (u, \hat{a}(v)) \rightsquigarrow (u, \tilde{a}(v) - \hat{a}(v)) = 0 \rightsquigarrow \tilde{a}(v) = \hat{a}(v)$ $\forall v$. Таким образом, сопряженный оператор существует и определен однозначно.

**Теорема 1.** *$L$ — УП. Пусть $a, b \in \operatorname{End}_{\mathbb{C}} L$. Тогда:*

*а)* $\widehat{a+b} = \hat{a} + \hat{b}$.

*б)* $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ $\widehat{\alpha a} = \bar{\alpha}\hat{a}$.

*в)* $\widehat{ab} = \hat{b}\hat{a}$.

*г)* $\hat{\hat{a}} = a$.

*д)* *$a$ обратим $\Leftrightarrow$ $\hat{a}$ обратим.*

*Доказательство.*

**а)**

$$((a+b)(u), v) = (a(u), v) + (b(u), v) = (u, \hat{a}(v)) + (u, \hat{b}(v)) = (u, (\hat{a} + \hat{b})(v)) \Rightarrow \widehat{a+b} = \hat{a} + \hat{b}$$

**б)**

$$((\alpha a)(u), v) = \alpha(a(u), v) = \alpha(u, \hat{a}(v)) = (u, \bar{\alpha}\hat{a}(v)) \Rightarrow \widehat{\alpha a} = \bar{\alpha}\hat{a}$$

**в)**

$$((ab)(u), v) = (a(b(u)), v) = (b(u), \hat{a}(v)) = (u, \hat{b}(\hat{a}(v))) = (u, \hat{b}\hat{a}(v)) \Rightarrow \widehat{ab} = \hat{b}\hat{a}$$

**г)**

$$(a(u), v) = (u, \hat{a}(v)) = \overline{(\hat{a}(v), u)} = \overline{(v, \hat{\hat{a}}(u))} = (\hat{\hat{a}}(u), v) \Rightarrow a = \hat{\hat{a}}$$

**д)** Пусть $a$ обратим. Тогда:

$$\mathrm{id}_L = \widehat{\mathrm{id}_L} = \widehat{a \circ a^{-1}} = \widehat{a^{-1}} \circ \hat{a}$$

откуда $\hat{a}$ обратим. Обратное следует из предыдущего пункта.

□

**Следствие 1.** *Полностью аналогично Следствию 2 из предыдущего вопроса.*

**Следствие 2.** *Полностью аналогично Следствию 3 из предыдущего вопроса.*

**Следствие 3.** *Полностью аналогично Следствию 4 из предыдущего вопроса.*

**Теорема 2.** *$L$ — УП, $a \in \operatorname{End}_{\mathbb{C}} L$. Пусть $B = \{e_i\}_{i=1}^n$ — ОН-базис ${}_{\mathbb{C}}L$ и пусть $[a]_B = A = (a_{ij})$. Тогда $[\hat{a}]_B = A^*$.*

*Доказательство.* Пусть $[\hat{a}]_B = B = (b_{ij})$. Тогда $a(e_i) = \sum_{j=1}^n a_{ji} e_j$, $\hat{a}(e_i) = \sum_{j=1} b_{ji} e_j$. В то же время $a_{ji} = (a(e_i), e_j) = (e_i, \hat{a}(e_j)) = \overline{(\hat{a}(e_j), e_i)} = \overline{b_{ij}}$, откуда $B = A^*$. □

**Следствие.** *В предыдущих обозначениях:*

*а)* $\chi_{\hat{a}} = \overline{\chi_a}$.

*б)* $\mathrm{sp}(a) = \{\lambda_i\}_{i=1}^n \Rightarrow \mathrm{sp}(\hat{a}) = \{\bar{\lambda_i}\}_{i=1}^n$.

*Доказательство.*

**а)**

$$\chi_{\hat{a}} = |A^* - \lambda E| = |\bar{A}^T - \lambda E| = |\overline{(A - \lambda E)}^T| = |\overline{A - \lambda E}| = \overline{\chi_a}$$

**б)** Следует из первого пункта.

□

## 9.19. Нормальные операторы в УП. Свойства собственных векторов нормального оператора

**Определение.** Пусть $L$ — ЕП или УП, $a \in \mathrm{End}_K L$. $a$ называется *нормальным*, если он коммутирует с $\hat{a}$: $\hat{a}a = a\hat{a}$. В свою очередь матрица $A \in M_n(\mathbb{C})$ называется *нормальной*, если $AA^* = A^*A$.

**Теорема.** *${}_{\mathbb{C}}L$ — УП. Пусть $a \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}} L$. Тогда $a$ нормален $\Leftrightarrow$ существует ОН-базис $B$ в ${}_{\mathbb{C}}L$, т.ч. $[a]_B$ диагональна.*

*Доказательство.*

**а)** $(\Rightarrow)$ Пусть $\dim_{\mathbb{C}} L = n$. Проведем доказательство при помощи ММИ.

$\underline{n = 1}$. Тривиальный случай.

$\underline{n \to n+1}$. Пусть $\lambda \in \mathrm{sp}(a)$. Считаем, что $\mathcal{L}_a(\lambda) \subsetneqq L$ (иначе можно выбрать произвольный ОН-базис). Из $a$-инвариантности $\mathcal{L}_a(\lambda)$ следует $\hat{a}$-инвариантность $\mathcal{L}_a(\lambda)^\perp$. $\mathcal{L}_a(\lambda)$ также $\hat{a}$-инвариантно (так как $\mathcal{L}_a(\lambda) \ni a(\hat{a}(v)) = \hat{a}(a(v)) = \lambda\hat{a}(v)$, откуда $\hat{a}(v) \in \mathcal{L}_a(\lambda)$), и $\mathcal{L}_a(\lambda)^\perp$ $a$-инвариантно.

Рассмотрим $a|_{\mathcal{L}_a(\lambda)^\perp}$ и $\hat{a}|_{\mathcal{L}_a(\lambda)^\perp}$. Они коммутируют. Тогда по ИП существует ОН-базис $B_0$ в $\mathcal{L}_a(\lambda)^\perp$, состоящий из собственных векторов. Пусть $B_1$ — произвольный ОН-базис в $\mathcal{L}_a(\lambda)$. Тогда $B \coloneqq B_0 \cup B_1$ — ОН-базис $L$, состоящий из собственных векторов, т.е. $[a]_B$ диагональна.

**б)** Пусть $B$ — ОН-базис в ${}_{\mathbb{C}}L$, т.ч. $[a]_B = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) =: A$. Тогда $[\hat{a}]_B = A^* = \mathrm{diag}(\bar{\lambda_1}, \ldots, \bar{\lambda_n})$. Ясно, что $A$ и $A^*$ коммутируют, тогда коммутируют и соответствующие операторы, откуда $a$ нормален.

□

**Следствие 1.** *$A \in M_n(\mathbb{C})$ нормальна $\Leftrightarrow$ существует унитарная $U \in M_n(\mathbb{C})$ такая, что $U^{-1}AU$ диагональна.*

*Доказательство.* Следует из унитарности матрицы перехода между ОН-базисами. □

**Следствие 2.** *Пусть $L$ — УП, $a \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}} L$ — нормальный оператор. Тогда $\forall \lambda \in \mathrm{sp}(a)$ $\mathcal{L}_a(\lambda) = \mathcal{L}_{\hat{a}}(\bar{\lambda})$.*

*Доказательство.* Пусть $B = \{e_i\}_{i=1}^n$ — ОН-базис $L$, т.ч. $[a]_B = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Тогда $[\hat{a}]_B = [a]_B^* = \mathrm{diag}(\bar{\lambda_1}, \ldots, \bar{\lambda_n})$. В таком случае $\forall i$ $a(e_i) = \lambda_i e_i$ и $\hat{a}(e_i) = \bar{\lambda_i} e_i$. Так как $e_i$, принадлежащие $\lambda_i \in \mathrm{sp}(a)$, составляют базисы $\mathcal{L}_a(\lambda)$ и $\mathcal{L}_{\hat{a}}(\bar{\lambda})$, то $\mathcal{L}_a(\lambda) = \mathcal{L}_{\hat{a}}(\bar{\lambda})$. □

**Следствие 3.** *$L$ — УП, $a$ — нормальный оператор. Пусть $\lambda, \mu \in \mathrm{sp}(a)$ — **различные** собственные числа. Тогда $\mathcal{L}_a(\lambda) \perp \mathcal{L}_a(\mu)$.*

*Доказательство.* Пусть $u \in \mathcal{L}_a(\lambda)$, $v \in \mathcal{L}_a(\mu) = \mathcal{L}_{\hat{a}}(\bar{\mu})$. Тогда:

$$\begin{array}{ccc} (a(u), v) & = & (u, \hat{a}(v)) \\ \| & & \| \\ (\lambda u, v) & & (u, \bar{\mu} v) \\ \| & & \| \\ \lambda(u, v) & & \mu(u, v) \end{array}$$

Отсюда $(\mu - \lambda)(u, v) = 0$. Но $\mu \neq \lambda$, следовательно $(u, v) = 0$. □

## 9.20. Нормальные операторы в ЕП (лемма об инвариантном двумерном подпространстве, каноническая форма матрицы нормального оператора, следствия)

**Лемма.** Пусть $L$ — ЕП, $a$ — нормальный оператор $L$, не имеющий вещественных собственных чисел. Тогда существует двумерное $a$- и $\hat{a}$-инвариантное подпространство $V \le {}_{\mathbb{R}}L$ и при этом существует ОН-базис $B_0$ в ${}_{\mathbb{R}}V$, т.ч. $[a|_V]_{B_0} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

*Доказательство.* Пусть $B = \{u_k\}_{k=1}^n$ — ОН-базис ${}_{\mathbb{R}}L$, $A \coloneqq [a]_B$ — нормальная матрица. Введем вспомогательный оператор $d\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, т.ч. $x \mapsto Ax$. Так как $A$ нормальна, то $d$ — нормальный оператор.

Пусть $\lambda = \alpha + \beta i \in \operatorname{sp}(d)$ (здесь $\beta \ne 0$) и $v = X + iY \in \mathcal{L}_d(\lambda) \setminus \{\mathbf{0}\}$ (где $X, Y \in \mathbb{R}^n$). Так как $A(X+iY) = d(v) = \lambda v = (a + \beta i)(X + iY)$, то по методу неопределенных коэффициентов имеем:

$$\begin{cases} AX = \alpha X - \beta Y \\ AY = \beta X + \alpha Y \end{cases} \tag{1}$$

Так как $A\bar{v} = A(X - iY) = \bar{\lambda}\bar{v}$, то $\bar{v} \in \mathcal{L}_d(\bar{\lambda}) \perp \mathcal{L}_d(\lambda) \ni v$. Отсюда $0 = (v, \bar{v}) = (X + iY)^T\overline{(X - iY)} = (X + iY)^T(X + iY) = X^TX + iY^TX + iX^TY - Y^TY = X^TX - Y^TY + 2iX^TY$, откуда:

$$\begin{cases} X^TX = Y^TY \\ X^TY = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Так как $v \in \mathcal{L}^{\hat{a}}(\bar{\lambda})$ и $[\hat{a}]_B = A^T$, то:

$$\begin{cases} A^TX = \alpha X + \beta Y \\ A^TY = -\beta X + \alpha Y \end{cases} \tag{3}$$

При этом $\|v\| = (X + iY)^T(X - iY) = X^TX + Y^TY \overset{(2)}{=} 2X^TX \overset{(2)}{=} 2Y^TY$. Выбрав $v$ такой, что $\|v\| = 2$, получим $X^TX = Y^TY = 1$.

Определим $v_1$ и $v_2$ следующим образом

$$v_1 \coloneqq \sum_{k=1}^n x_k u_k,\ X = (x_k)_{k=1}^n$$
$$v_2 \coloneqq \sum_{k=1}^n y_k u_k,\ Y = (y_k)_{k=1}^n$$

Рассмотрим ${}_{\mathbb{R}}V \coloneqq {}_{\mathbb{R}}\langle v_1, v_2\rangle \le {}_{\mathbb{R}}L$. По (1) имеем:

$$\begin{cases} a(v_1) = \alpha v_1 - \beta v_2 \in V \\ a(v_2) = \beta v_1 + \alpha v_2 \in V \end{cases}$$

откуда $V$ $a$-инвариантно. По (3) имеем:

$$\begin{cases} \hat{a}(v_1) = \alpha v_1 + \beta v_2 \in V \\ \hat{a}(v_2) = -\beta v_1 + \alpha v_2 \in V \end{cases}$$

откуда $V$ $\hat{a}$-инвариантно.

Из (2) также следует, что $(v_1, v_2) = 0$. По выбору $v$ имеем $\|v_1\| = \|v_2\| = 1$. При этом $[a|_V] = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ и лемма доказана. □

**Теорема.** *Пусть $L$ — ЕП, $a$ — оператор $L$. Справедливы следующие утверждения:*

*а) $a$ нормален $\Leftrightarrow$ существует ОН-базис $B$ в ${}_{\mathbb{R}}L$, т.ч.*

$$[a]_B = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_t \end{pmatrix}, \text{ где } A_k \text{ — либо } 1\times 1\text{-матрица, либо имеет вид } \begin{pmatrix} \alpha_k & \beta_k \\ -\beta_k & \alpha_k \end{pmatrix} \quad (*)$$

*б) Такой вид матрицы определен однозначно оператором $a$ с точностью до перестановки диагональных блоков.*

*Доказательство.*

**а)** $\underline{(\Rightarrow)}$. Пусть $\dim_{\mathbb{R}} L = n$. Проведем доказательство индукцией по $n$.

$\mathbf{n = 1}$. Тривиальный случай.

$\mathbf{n = 2}$. Возможно два случая:

а) если $\mathrm{sp}(a) \neq \varnothing$, то рассмотрим $\mathcal{L}_a(\lambda)$. Если оно совпадает с $L$, то достаточно выбрать любой ОН-базис, чтобы получить диагональную форму. В противном случае $\mathcal{L}_a(\lambda)$ и $\mathcal{L}_a(\lambda)^\perp$ $a$- и $\hat{a}$-инвариантны, и к ним можно применить случай $n = 1$.

б) если $\mathrm{sp}(a) = \varnothing$, то по лемме в $L$ можно выбрать ОН-базис $B_0$, т.ч. $[a]_B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$.

$\mathbf{n - 1 \to n}$. Пусть утверждение верно для $\dim_{\mathbb{R}} L < n$. Тогда возможно два случая:

а) если $\mathrm{sp}(a) \neq \varnothing$, то случай аналогичен похожему случаю для $n = 2$ с применением ИП.

б) если $\mathrm{sp}(a) \neq \varnothing$, то по лемме выделим двумерное $a$- и $\hat{a}$-инвариантное подпространство $V \leq {}_{\mathbb{R}}L$. Тогда $V$ и $V^\perp$ $a$- и $\hat{a}$-инвариантны, и к ним можно применить ИП.

$\underline{(\Leftarrow)}$ Достаточно доказать, что каждый блок получившейся матрицы нормален. В случае $1\times 1$-блока это очевидно, а для $A_k = \begin{pmatrix} \alpha_k & \beta_k \\ -\beta_k & \alpha_k \end{pmatrix}$ нормальность легко проверяется умножением.

**б)** Т.к. искомая форма матрицы блочно-диагонально, то такое представление соответствует разложению соответствующего ${}_{\mathbb{R}}L$ $\mathbb{R}[x]$-модуля в прямую сумму подмодулей.

Для блока $A_k$ вида $(\lambda)$ минимальным многочленом является $x - \lambda$, поэтому соответствующий подмодуль имеет вид $\mathbb{R}[x]/\langle x - \lambda\rangle$ — циклический примарный.

Для блока $A_k$ вида $\begin{pmatrix} \alpha_k & \beta_k \\ -\beta_k & \alpha_k \end{pmatrix}$ характеристический многочлен имеет вид $\chi_{A_k} = (\alpha_k - x)^2 + \beta_k^2$ и, очевидно, неприводим. Тогда минимальный многочлен (делящий $\chi_{A_k}$ по следствию теоремы Гамильтона-Кэли) совпадает с ним. Отсюда такому блоку соответствует подмодуль вида $\mathbb{R}[x]/\langle x^2 - 2\alpha_k x + \alpha_k^2 + \beta_k^2\rangle$ — циклический примарный. Такое разложение единственно с точностью до порядка слагаемых по теореме Крулля-Шмидта. Тогда единственно и представление матрицы в искомом виде.

$\square$

**Следствие 1.** *$A \in M_n(\mathbb{R})$ нормальна $\Leftrightarrow$ существует ортогональная $C \in M_n(\mathbb{R})$, т.ч. $C^TAC$ имеет вид $(*)$.*

*Доказательство.* Очевидно. $\square$

**Следствие 2.** *$A \in M_n(\mathbb{R})$. $A$ симметрична $\Leftrightarrow$ существует ортогональная $C \in M_n(\mathbb{R})$, т.ч. $C^TAC$ диагональна.*

*Доказательство.*

**а)** $(\Rightarrow)$ Можно считать, что $A$ имеет вид $(*)$. Так как она симметрична, то она диагональна.

**б)** $(\Leftarrow)$ $A^T = (CDC^T)^T = CD^TC^T = CDC^T = A$, откуда $A$ симметрична.

$\square$

**Следствие 3.** *Пусть $A \in M_n(\mathbb{R})$ — симметрическая матрица, тогда $\chi_A$ имеет только вещественные корни.*

*Доказательство.* Пусть $A = CDC^{-1}$, где $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, $\lambda_k \in \mathbb{R}$. Тогда $\chi_A = \chi_D = \prod_{k=1}^{n}(\lambda_k - x)$. $\square$

## 9.21. Изометрические операторы, простейшие свойства

**Определение.** Пусть $L$ — ЕП или УП, $a$ — оператор $L$. $a$ называется *изометрическим*, если $\forall u, v$ $(a(u), a(v)) = (u, v)$. Изометрические операторы в УП называются *унитарными*, а в ЕП — *ортогональными*.

**Теорема.** *$L$ — ЕП или УП, $a$ — оператор. $a$ изометричен $\Leftrightarrow$ $\hat{a}a = \mathrm{id}_L$.*

*Доказательство.*

**а)** $(\Rightarrow)$ $\forall u, v \in L$ имеем $(u, v) = (a(u), a(v)) = (u, \hat{a}a(v))$, откуда $\hat{a}a(v) = v$ и $\hat{a}a = \mathrm{id}_L$.

**б)** $(\Leftarrow)$ Имеем $(a(u), a(v)) = (u, \hat{a}a(v)) = (u, v)$ и $a$ изометричен.

$\square$

**Следствие 1.** *Любой изометрический оператор обратим и обратен своему сопряженному.*

*Доказательство.* Следует из формулировки теоремы. $\square$

**Следствие 2.** *$a$ изометричен $\Leftrightarrow$ $\hat{a}$ изометричен.*

*Доказательство.* Следует из того, что $\hat{\hat{a}} = a$. $\square$

**Следствие 3.** *Любой изометрический оператор нормален.*

*Доказательство.* $\forall a$ $\hat{a}a = \mathrm{id}_L = a\hat{a}$ и $a$ нормален. $\square$

**Следствие 4.** *$L$ — УП, $a$ — оператор $L$. Равносильны:*

*а) $a$ — унитарный оператор.*

*б) Для любого ОН-базиса $B$ матрица $[a]_B$ унитарна.*

*в) Существует ОН-базис $B$, т.ч. матрица $[a]_B$ унитарна.*

**Следствие 5.** *$L$ — ЕП, $a$ — оператор $L$. Равносильны:*

*а) $a$ — ортогональный оператор.*

*б) Для любого ОН-базиса $B$ матрица $[a]_B$ ортогональна.*

*в) Существует ОН-базис $B$, т.ч. матрица $[a]_B$ ортогональна.*

## 9.22. Унитарный оператор: свойства собственных чисел, связь между унитарными и эрмитовыми матрицами. Унитарная группа

**Теорема.** *$L$ — УП, $a$ — оператор. $a$ унитарен $\Leftrightarrow \exists$ ОН-базис $B$, т.ч. $[a]_B$ диагональна и $\forall \lambda \in \mathrm{sp}(a)$ $|\lambda| = 1$.*

*Доказательство.* Из унитарности $a$ следует нормальность $a$ и диагональность матрицы $[a]_B = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) =: A$. Рассмотрим $A^* = \mathrm{diag}(\bar{\lambda_1}, \ldots, \bar{\lambda_n})$. $a$ унитарен в том и только в том случае, когда $A^*A = E$. Но $A^*A = E \Leftrightarrow \mathrm{diag}(|\lambda_1|^2, \ldots, |\lambda_n|^2) = E \Leftrightarrow \forall \lambda \in \mathrm{sp}(a)$ $|\lambda| = 1$. □

**Следствие 1.** *$A \in M_n(\mathbb{C})$ унитарна $\Leftrightarrow \exists$ унитарная $U \in M_n(\mathbb{C})$, т.ч. $U^{-1}AU$ диагональна и $\forall \lambda \in \mathrm{sp}(a) |\lambda| = 1$.*

*Доказательство.* Следует из свойств унитарной матрицы и доказательства теоремы. □

**Следствие 2.** *$A \in M_n(\mathbb{C})$ унитарна $\Leftrightarrow \exists$ эрмитова $\Phi \in M_n(\mathbb{C})$, т.ч. $A = e^{i\Phi}$.*

*Доказательство.*

**а)** ($\Rightarrow$) Пусть $U \in M_n(\mathbb{C})$ — унитарная матрица, т.ч. $U^{-1}AU = D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, где $|\lambda_j| = 1$ $\forall j$. Пусть $\lambda_j = e^{i\phi_j}$.

Положим $\tilde{\Phi} := \mathrm{diag}(\phi_1, \ldots, \phi_n)$. Имеем $D = e^{i\tilde{\Phi}} \rightsquigarrow A = UDU^{-1} = Ue^{i\tilde{\Phi}}U^{-1} = e^{iU\tilde{\Phi}U^{-1}}$. Положим $\Phi := U\tilde{\Phi}U^{-1}$. Получим $D = e^{i\Phi}$. При этом $\Phi^* = (U\tilde{\Phi}U^{-1})^* = (U^{-1}) * \tilde{\Phi}^* U^* = U\tilde{\Phi}U^{-1} = \Phi$, т.е. $\Phi$ эрмитова.

**б)** ($\Leftarrow$) Имеем $A = e^{i\Phi}$, где $\Phi$ эрмитова. Тогда:

$$A^* = (e^{i\Phi})^* = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(i\Phi)^k\right)^* = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left((i\Phi)^*\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(-i\Phi)^k = e^{-i\Phi}$$

Ясно, что $i\Phi$ и $-i\Phi$ коммутируют. Имеем $AA^* = e^{i\Phi}e^{-i\Phi} = E$, откуда $A$ унитарна.

□

**Определение.** $L$ — УП, $n := \dim_{\mathbb{C}} L$. Множество всех унитарных операторов на $L$ образует группу. Аналогично, множество всех унитарных $n \times n$-матриц образует группу $U(n)$, называемую унитарной группой порядка $n$.

## 9.23. Ортогональные операторы: каноническая форма матрицы ортогонального оператора. Ортогональная группа, специальная ортогональная группа

**Теорема.** *$L$ — ЕП, $a$ — оператор $L$. Справедливы следующие утверждения:*

*а) $a$ ортогонален $\Leftrightarrow \exists$ ОН-базис $B$, т.ч.*

$$[a]_B = \begin{pmatrix} E_s & & & & \\ & -E_t & & & \\ & & A_1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & A_t \end{pmatrix}, \text{ где } A_k = \begin{pmatrix} \cos\phi_k & -\sin\phi_k \\ \sin\phi_k & \cos\phi_k \end{pmatrix}, \ \phi_k \notin \{\pi l \mid l \in \mathbb{Z}\} \qquad (♀)$$

*б) Матрица вида (♀) определена однозначно с точностью до перестановки блоков $A_k$.*

*Доказательство.*

**а)** $(\Rightarrow)$ $a$ ортогонален $\rightsquigarrow$ $a$ нормален $\rightsquigarrow$ $\exists$ ОН-базис $B$, т.ч. матрица $[a]_B$ имеет канонический вид ($(*)$ из соответствующей теоремы). Обозначим блоки такой матрицы как $B_1, \ldots, B_t$. Так как $A^T A = E$, то $B_k^T B_k \in \{E_1, E_2\}$. Имеем $B_k = (\pm 1)$ в случае $1 \times 1$-блока и $\alpha_k^2 + \beta_k^2 = 1$ в случае второго блока. Во втором случае $\exists \phi_k \notin \{\pi l \mid l \in z\}$, т.ч. $\begin{cases} \alpha_k = \cos\phi_k \\ -\beta_k = \sin\phi_k \end{cases}$, и соответствующий блок $A_k$ имеет нужный вид.

$(\Leftarrow)$ Легко проверяется, что матрица вида (♀) ортогональна, а тогда ортогонален и соответствующий оператор.

**б)** Напрямую следует из единственности канонической формы матрицы нормального оператора.

□

**Следствие.** *$A \in M_n(\mathbb{R})$ ортогональна $\Leftrightarrow$ $\exists$ ортогональная $C \in M_n(\mathbb{R})$, т.ч. $C^T AC$ имеет вид (♀).*

*Доказательство.* Очевидно. □

**Определение.** Ортогональные операторы, действующие на ЕП $L$, образуют группу. Аналогично, ортогональные $n \times n$-матрицы образуют группу $\mathrm{S}(n, \mathbb{R})$, называемую *ортогональной.* $\forall M \in \mathrm{S}(n, \mathbb{R})$ $\det M = \pm 1$. Матрицы $M \in \mathrm{S}(n, \mathbb{R})$, т.ч. $\det M = 1$, образуют группу $\mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$, называемую *специальной ортогональной.*

## 9.24. Вращения в $\mathbb{R}^3$, теорема Эйлера. Несобственно ортогональные операторы в $\mathbb{R}^2$

**Определение.** Пусть $L$ — ЕП, $a$ — **ортогональный** оператор. Выберем $B$ — произвольный ОН-базис ${}_{\mathbb{R}}L$, т.ч. $\det[a]_B = \pm 1$. В случае, если $\det[a]_B = 1$, $a$ назовем *собственно ортогональным*, в противном случае — *несобственно ортогональным.*

**Определение.** Собственно ортогональные операторы на $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$ со стандартным скалярным произведением называют вращениями.

**Теорема 1.** *Пусть $a \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^3$ — вращение. Тогда существует ОН-базис $B$ в $R^3$, т.ч.*

$$[a]_B = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

*Доказательство.* Следует из более общей теоремы о канонической форме матрицы ортогонального оператора. □

**Теорема 2.** *(Эйлера) Композиция двух вращений в $\mathbb{R}^3$ вокруг пересекающихся осей является вращением вокруг некоторой третьей оси.*

*Доказательство.* Следует из того, что вращения в $R^3$ образуют группу. □

**Теорема 3.** *Любой несобственно ортогональный оператор в $\mathbb{R}^2$ является отражением относительно некоторой прямой.*

*Доказательство.* Каноническая форма несобственно ортогонального оператора в $\mathbb{R}^2$ имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, а отсюда очевидным образом следует утверждение теоремы. □

## 9.25 – 9.27. Свойства самосопряженных операторов на ЕП и УП

**Теорема 1.** *Пусть $L$ — УП, $a$ — самосопряженный оператор (т.е. т.ч. $a = \hat{a}$). Тогда $\forall u \in L$ $(a(u), u) \in \mathbb{R}$.*

*Доказательство.* $\overline{(a(u), u)} = (u, a(u)) = (a(u), u)$, откуда $(a(u), u) \in \mathbb{R}$. □

**Теорема 2.** *$L$ — ЕП, $a$ — оператор $L$. $a$ — самосопряженный $\Leftrightarrow \exists$ ОН-базис $B$ в ${}_{\mathbb{R}}L$, т.ч. $[a]_B$ диагональна.*

*Доказательство.*

**а)** $(\Rightarrow)$ $a$ самосопряжен $\rightsquigarrow$ $a$ нормален $\rightsquigarrow$ $\exists$ ОН-базис $B$ в ${}_{\mathbb{R}}L$, т.ч. $A := [a]_B$ имеет канонический вид $(*)$ из соответствующей теоремы. Так как $a$ самосопряжен, то $A^T = A$; соответственно блоков вида $\begin{pmatrix} \alpha_k & \beta_k \\ \beta_k & \alpha_k \end{pmatrix}$ в $A$ нет, и $A$ диагональна.

**б)** $(\Leftarrow)$ Пусть $[a]_B = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Тогда $[a]_B^T = [a]_B$, и $a$ самосопряжен.

□

**Теорема 3.** *$L$ — УП, $a$ — оператор. $a$ самосопряжен $\Leftrightarrow \exists$ ОН-базис в ${}_{\mathbb{C}}L$, т.ч. $[a]_B$ диагональна, и при этом $\forall \lambda \in \operatorname{sp}(a)$ $\lambda \in \mathbb{R}$.*

*Доказательство.*

**а)** $(\Rightarrow)$ $a$ самосопряжен $\rightsquigarrow$ $a$ нормален $\rightsquigarrow$ $\exists$ ОН-базис $B$ в ${}_{\mathbb{R}}L$, т.ч. $A := [a]_B = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. При этом $A^* = A$, откуда $\forall k$ $\lambda_k \in \mathbb{R}$ и все собственные числа матрицы (а, соответственно, и оператора) вещественны.

**б)** $(\Leftarrow)$ Пусть $A := [a]_B = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ и $\lambda_k \in \mathbb{R}$. Тогда $A^* = A$, и $a$ самосопряжен.

□

**Следствие.** *Эрмитова матрица имеет только вещественные собственные числа.*

## 9.28. Положительно определенные самосопряженные операторы, простейшие свойства, примеры (операторы $\hat{a}a$ и $a\hat{a}$)

**Определение.** $L$ — ЕП или УП, $a$ — самосопряженный оператор. $a$ называется *положительно определенным*, если:

а) $\forall u \in L$ $(a(u), u) \geq 0$.

б) $(a(u), u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$.

*Замечание.* Если $a$ положительно определен, то $a$ обратим:

$$a(u) = \mathbf{0} \rightsquigarrow (a(u), u) = 0 \rightsquigarrow u = \mathbf{0} \rightsquigarrow \operatorname{Ker} a = \{\mathbf{0}\}$$

откуда $a$ мономорфизм и, как следствие, изоморфизм.

**Теорема 1.** *$L$ — ЕП или УП, $a$ — оператор. Пусть $a$ обратим, тогда $a\hat{a}$ и $\hat{a}a$ — положительно определенные самосопряженные операторы.*

*Доказательство.* Ясно, что $a\hat{a}$ самосопряжен. Имеем:

а) $(a\hat{a}(u), u) = (\hat{a}(u), \hat{a}(u)) \geq 0$.

б) $(a\hat{a}(u), u) = 0 \rightsquigarrow \hat{a}(u) = \mathbf{0} \overset{\cdot\widehat{a^{-1}}}{\rightsquigarrow} u = \mathbf{0}$.

Для $\hat{a}a$ утверждение доказывается аналогично. □

**Теорема 2.** *$L$ — ЕП или УП, $a$ — самосопряженный оператор. $a$ положительно определен $\Leftrightarrow \forall\lambda \in \mathrm{sp}(a)\ \lambda > 0$.*

*Доказательство.*

**а)** ($\Rightarrow$) Пусть $a$ самосопряжен, тогда $\exists$ ОН-базис $B$ в ${}_K L$, т.ч. $[a]_B = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ и $\lambda_k \in \mathbb{R}\ \forall k$. Имеем:

$$\lambda_j = (a(e_j), e_j) > 0 \rightsquigarrow (\lambda_j e_j, e_j) = \lambda_j (e_j, e_j) = \lambda_j \cdot 1 > 0 \rightsquigarrow \lambda_j > 0\ \forall j$$

**б)** ($\Leftarrow$) Пусть $B = \{e_j\}_{j=1}^n$ — ОН-базис в ${}_K L$, т.ч. $[a]_B = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ и $\forall j\ \lambda_j > 0$. Пусть $u \in L$, тогда $u$ представим в виде $u = \sum_{j=1}^n x_j e_j$, где $x_j \in K$. Имеем:

$$(a(u), u) = \left( a\left( \sum_{j=1}^n x_j e_j \right),\ \sum_{k=1}^n x_k e_k \right) = \sum_{j,k=1}^n x_j \bar{x_k} (a(e_j), e_k)$$
$$= \sum_{j,k=1}^n x_j \bar{x_k} \lambda_j (e_j, e_k) = \sum_{s=1}^n x_s \bar{x_s} \lambda_s = \sum_{s=1}^n \|x_s\|^2 \lambda_s \geq 0$$

Предположим, что $(a(u), u) = 0$, тогда $\sum_{s=1}^n \|x_s\|^2 \lambda_s = 0$. Но $\lambda_s > 0\ \forall s$, откуда $\|x_s\|^2 = 0\ \forall s$ и $u = \mathbf{0}$.

□

## 9.29. Теорема об извлечении корня из положительно определенного оператора

**Теорема.** *Пусть $L$ — ЕП или УП, $a$ — положительно определенный оператор. Пусть $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, тогда $\exists!$ положительно определенный оператор $c$, т.ч. $c^m = a$.*

*Доказательство.*

**а)** (существование) Имеем $a$ — положительно определенный самосопряженный оператор. Тогда $\exists$ ОН-базис $B = \{e_j\}_{j=1}^n$, т.ч. $[a]_B = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, где $\lambda_j > 0\ \forall j$. Пусть $\mu_j = \sqrt[m]{\lambda_j} \in \mathbb{R}_+$. Построим оператор $c$, т.ч. $[c]_B = \mathrm{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$, т.е. $c(e_j) = \mu_j e_j$. Тогда $[c^m]_B = [a]_B$ и, соответственно, $c^m = a$. Заметим, что $\forall\lambda \in \mathrm{sp}(a)\ \mathcal{L}_a(\lambda) = \mathcal{L}_c(\sqrt[m]{\lambda})$.

**б)** (единственность) Предположим, что $\tilde{c}$ — еще один положительно определенный оператор, т.ч. $\tilde{c}^m = a$. Тогда $\exists$ ОН-базис $B'$ в ${}_K L$, т.ч. $[\tilde{c}]_{B'} = \mathrm{diag}(\tilde{\mu_1}, \dots, \tilde{\mu_n})$, причем $\forall j\ \tilde{\mu_j} > 0$. Тогда $[a]'_B = \mathrm{diag}(\tilde{\mu_1}^m, \dots, \tilde{\mu_n}^m)$. По единственности ЖНФ можно считать, что $\lambda_j = \mu_j^m = \tilde{\mu_j}^m\ \forall j$. Аналогично предыдущему пункту имеем $\mathcal{L}_c(\sqrt[m]{\lambda}) = \mathcal{L}_a(\lambda) = \mathcal{L}_{\tilde{c}}(\sqrt[m]{\lambda})\ \forall\lambda \in \mathrm{sp}(a)$, тогда $c$ и $\tilde{c}$ совпадают на $\mathcal{L}_a(\lambda)\ \forall\lambda \in \mathrm{sp}(a)$. Но тогда они совпадают и на $\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{sp}(a)} \mathcal{L}_a(\lambda) = L$, откуда $\tilde{c} \equiv c$.

□

## 9.30. Теорема о полярном разложении оператора

**Теорема.** *$L$ — ЕП или УП, $a$ — оператор. $a$ обратим $\Leftrightarrow$*

*а) $a$ можно представить в виде $a = r \circ u$, где $r$ — положительно определенный самосопряженный оператор, $u$ — изометрический оператор.*

*б) Такое представление единственно.*

*Доказательство.*

**а)** Так как $a$ обратим, то $a\hat{a}$ — положительно определенный самосопряженный оператор. По теореме об извлечении корня $\exists!$ положительно определенный самосопряженный оператор $r$, т.ч. $r^2 = a\hat{a}$. Т.к. $r$ положительно определен, то он обратим. Положим $u \coloneqq r^{-1}a$. Тогда $\hat{u} = \widehat{r^{-1}a} = \hat{a}\widehat{r^{-1}} = \hat{a}r^{-1}$, откуда $u\hat{u} = r^{-1}a\hat{a}r^{-1} = r^{-1}r^2r^{-1} = \mathrm{id}_L$ и $u$ изометричен.

**б)** Предположим, что $a$ допускает еще одно полярное разложение в виде $a = r'u'$. Тогда:

$$\hat{a} = \hat{u}\hat{r} = u^{-1}r \rightsquigarrow a\hat{a} = ruu^{-1}r = r^2$$
$$\hat{a} = \hat{u}'\hat{r}' = (u')^{-1}r \rightsquigarrow a\hat{a} = r'u'(u')^{-1}r' = (r')^2$$

Таким образом, и $r$, и $r'$ — квадратные корни оператора $a\hat{a}$. Тогда они совпадают, откуда $ru = ru' \overset{r^{-1}\cdot}{\rightsquigarrow} u = u'$.

□

## 9.31. Характеризация операторов ортогонального проектирования

**Теорема.** *$L$ — ЕП или УП. $a$ — оператор. Равносильны:*

*а) $a$ — оператор ортогонального проектирования.*

*б) $a$ — самосопряженный проектор.*

*в) $a$ самосопряжен и $\forall \lambda \in \mathrm{sp}(a)$ $\lambda \in \{0, 1\}$.*

*Доказательство.*

**(а) ⇒ (в).** Представим $L$ в виде ${}_KL = \operatorname{Im} a \oplus (\operatorname{Im} a)^\perp$. Выберем в $\operatorname{Im} a$ и $(\operatorname{Im} a)^\perp$ ОН-базисы $B_0$ и $B_1$ соответственно. Положим $B \coloneqq B_0 \cup B_1$ — это будет ОН-базис ${}_KL$. Тогда $A \coloneqq [a]_B = \mathrm{diag}(\underbrace{1, \ldots, 1}_{k\text{ раз}}, 0, \ldots, 0)$, где $k = \dim_K \operatorname{Im} a$, откуда $\mathrm{sp}(a) = \mathrm{sp}\, A \subset \{0, 1\}$.

**(в) ⇒ (б).** Так как $a$ самосопряжен, то $\exists$ ОН-базис $B$ в ${}_KL$, т.ч. $A \coloneqq [a]_B = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, при этом $\lambda_j \in \{0, 1\}$. Тогда $A^2 = A$, откуда $a^2 = a$ и $a$ — проектор.

**(б) ⇒ (а).** Представим $L$ в виде ${}_KL = \operatorname{Im} a \oplus \operatorname{Ker} a$. Тогда по самосопряженности $a$ имеем $\operatorname{Ker} a = \operatorname{Ker} \hat{a} = (\operatorname{Im} a)^\perp$ и $L = \operatorname{Im} a \oplus (\operatorname{Im} a)^\perp$, откуда $a$ — оператор ортогонального проектирования.

□

## 9.32. Спектральное разложение самосопряженного оператора. Спектральное разложение симметрической вещественной формы

**Теорема.** *$L$ — ЕП или УП, $a$ — самосопряженный оператор. Для $\lambda \in \mathrm{sp}(a)$ введем обозначения $V_\lambda \coloneqq \mathcal{L}_a(\lambda)$, $p_\lambda$ — оператор ортогонального проектирования на $V_\lambda$. Справедливы следующие утверждения:*

*а) $a = \sum_{\lambda \in \mathrm{sp}(a)} \lambda p_\lambda$, причем $\lambda$ считаются без учета кратности.*

*б) $\forall \lambda, \mu \in \mathrm{sp}(a)$ $p_\lambda p_\mu = \begin{cases} p_\lambda, & \mu = \lambda \\ 0, & \mu \neq \lambda \end{cases}$*

*Доказательство.*

**а)** Так как ${}_K L = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{sp}(a)} V_\lambda$, то $\forall u \in L$ имеем $u = \sum_{\lambda \in \mathrm{sp}(a)} u_\lambda$, где $u_\lambda \in V_\lambda$. Так как $a$ нормален, то $V_\lambda \perp V_\mu$ $\forall \lambda \neq \mu \in \mathrm{sp}(a)$. При этом ясно, что $p_\lambda(u) = u_\lambda$. Так,

$$a(u) = a\left(\sum_{\lambda \in \mathrm{sp}(a)} u_\lambda\right) = \sum_{\lambda \in \mathrm{sp}(a)} a(u_\lambda) = \sum_{\lambda \in \mathrm{sp}(a)} \lambda u_\lambda = \sum_{\lambda \in \mathrm{sp}(a)} \lambda p_\lambda(u) = \left(\sum_{\lambda \in \mathrm{sp}(a)} \lambda p_\lambda\right)(u)$$

**б)** Очевидным образом следует из того, что $p_\lambda(u) = u_\lambda$.

□

*Замечание.* Можно переформулировать теорему следующим образом: пусть $L$ — ЕП или УП, $a$ — самосопряженный оператор, $B = \{e_j\}_{j=1}^n$ — ОН-базис, состоящий из собственных векторов. Положим $V_j = {}_K\langle e_j \rangle$, $p_j$ — оператор проектирования на $V_j$. Пусть $\lambda_j$ — собственное число, которому принадлежит $e_j$. Тогда:

а) $a = \sum_{j=1}^n \lambda_j p_j$.

б) $p_k p_j = \begin{cases} p_k, & k = j \\ 0, & k \neq j \end{cases}$

**Следствие.** *Пусть $A \in M_n(\mathbb{R})$ и $A^T = A$. Пусть $\{u_k\}_{k=1}^n$ — ОН-базис $\mathbb{R}^n$, состоящий из собственных векторов $A$ (т.е. $Au_k = \lambda_k u_k$). Тогда $A = \sum_{k=1}^n \lambda_k u_k u_k^T$.*

*Доказательство.* Достаточно воспользоваться переформулированным вариантом теоремы, заметив, что $(u_k u_k^T)x = u_k(u_k^T x) = (u_k, x)u_k$ — проекция $x$ на $u_k$. □

## 9.33. Приведение пары вещественных квадратичных форм к каноническому виду

**Теорема.** *Пусть $Q_1, Q_2 \colon {}_{\mathbb{R}}L \to \mathbb{R}$ — квадратичные формы, причем $L$ конечномерно. Пусть дополнительно $Q_1$ положительно определена. Тогда существует базис $B$ в ${}_{\mathbb{R}}L$, т.ч. $[Q_1]_B$ и $[Q_2]_B$ одновременно диагональны.*

*Доказательство.* Пусть $F_1, F_2 \colon L^2 \to \mathbb{R}$ — соответствующие билинейные формы. В силу положительной определенности $F_1$ пространство $({}_{\mathbb{R}}L, F_1)$ будет являться евклидовым. Выберем ОН-базис $\tilde{B}$ в ${}_{\mathbb{R}}L$. Положим $\tilde{F}_i \coloneqq [F_i]_{\tilde{B}}$.

Ясно, что $\tilde{F}_1 = E_n$. Рассмотрим оператор $a$ на $L$, т.ч. $[a]_{\tilde{B}} = \tilde{F}_2$. Так как $\tilde{F}_2$ симметрична (как матрица симметрической билинейной формы), то $a$ самосопряжен. В таком случае существует ОН-базис $B$ в ${}_{\mathbb{R}}L$, т.ч. $M_2 \coloneqq [a]_B = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Пусть $\tilde{B} \overset{C}{\rightsquigarrow} B$. $C$ ортогональна как матрица перехода между ОН-базисами.

Имеем:

$$[Q_2]_B = [F_2]_B = C^T \tilde{F}_2 C = C^{-1} \tilde{F}_2 C = C^{-1}[a]_{\tilde{B}} C = M_2 \text{ (диагональная матрица)}$$
$$[Q_1]_B = [F_1]_B = C^T \tilde{F}_1 C = C^T C = E_n \text{ (диагональная матрица)}$$

□

# Часть X.

# Полилинейная алгебра

## 10.1. Понятие тензорнго произведения модулей (определение, конструкция, следствия, примеры)

**Определение.** $k$ — коммутативное кольцо с единицей, ${}_kU$ и ${}_kV$ — модули. *Тензорным произведением* $U$ и $V$ называется пара $(T, t)$, где ${}_kT$ — модуль, а $t\colon U \times V \to T$ — билинейное отображение, обладающее *универсальным свойством тензорного произведения*:

$$\begin{tikzcd} U \times V \arrow[rr, "t"] \arrow[dr, "f"'] & & T \arrow[dl, dashed, "\varphi"] \\ & W & \end{tikzcd}$$

то есть $\forall f\colon U \times V \to W$ — билинейного отображения, где ${}_kW$ — некоторый модуль, $\exists!$ $k$-гомоморфизм $\varphi\colon T \to W$, т.ч. $\varphi t = f$.

Тензорное произведение единственно с точностью до изоморфизма. В связи с этим используется стандартное обозначение $T =: U \otimes_k V$ (или, если кольцо ясно из контекста, $U \otimes V$).

**Теорема.** *$k$ — коммутативное кольцо с единицей. Пусть $U$ и $V$ — $k$-модули, тогда их тензорное произведение существует.*

*Доказательство.* Пусть $X := U \times V$. Построим свободный модуль $F := F\langle X\rangle$. Положим:

$$\begin{aligned}
Y_1 &:= \{(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, v) - \alpha_1(u_1, v) - \alpha_2(u_2, v) \mid \alpha_1, \alpha_2 \in k, u_1, u_2 \in U, v \in V\}\\
Y_2 &:= \{(u, \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) - \alpha_1(u, v_1) - \alpha_2(u, v_2) \mid \alpha_1, \alpha_2 \in k, u \in U, v_1, v_2 \in V\}\\
Y &:= Y_1 \mathring{\cup} Y_2
\end{aligned}$$

Пусть $G := {}_K\langle Y\rangle \le {}_kF$. Рассмотрим ${}_kT := F/G$. Введем отображение $t\colon U \times V \to T$, т.ч. $(u, v) \mapsto (u, v) + G$ — билинейное вследствие определения $G$.

Докажем, что пара $(T, t)$ удовлетворяет универсальному свойству тензорного произведения. Пусть $\rho\colon F \to T$ — отображение факторизации, $i\colon U \times V \to F$ — вложение. Ясно, что $t = \rho i$. Пусть ${}_kW$ — произвольный модуль и $f\colon U \times V \to W$ — билинейное отображение. Рассмотрим следующую диаграмму:

$$\begin{tikzcd} U \times V \arrow[rr, "t"] \arrow[dr, hook, "i"] \arrow[ddr, "f"'] & & T \arrow[ddl, dashed, "\varphi"] \\ & F \arrow[ur, two heads, "\rho"'] \arrow[d, dashed, "\tilde{f}"] & \\ & W & \end{tikzcd}$$

По определению $F$ $\exists!$ $k$-гомоморфизм $\tilde{f}\colon F \to W$, т.ч. $f = \tilde{f}i$. Покажем, что $G \subset \operatorname{Ker}\tilde{f}$. Для этого достаточно доказать, что $Y \subset \operatorname{Ker}\tilde{f}$. Рассмотрим это на примере $Y_1$ (для $Y_2$ действия аналогичны):

$$\begin{aligned}
f(y_1) &= \tilde{f}((\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, v) - \alpha_1(u_1, v) - \alpha_2(u_2, v))\\
&= \tilde{f}((\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, v)) - \alpha_1\tilde{f}((u_1, v)) - \alpha_2\tilde{f}((u_2, v)) =\\
&= \tilde{f}(i(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, v)) - \alpha_1\tilde{f}(i(u_1, v)) - \alpha_2\tilde{f}(i(u_2, v)) =\\
&= f(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, v) - \alpha_1 f(u_1, v) - \alpha_2 f(u_2, v) = f(0, v) = 0
\end{aligned}$$

По теореме о продолжении гомоморфизма на фактормодуль $\exists!$ $k$-гомоморфизм $\varphi\colon T \to W$, т.ч. $\tilde{f} = \varphi\rho$. Тогда $\varphi t = \varphi\rho i = \tilde{f}i = f$. Предположим, что $\tilde{\varphi}\colon T \to W$ — еще один $k$-гомоморфизм, т.ч. $\tilde{\varphi}t = f$. Тогда $f = (\tilde{\varphi}\rho)i$. При этом $\tilde{f}i = f$ и $\tilde{f}$ — единственное отображение, обладающее таким свойством. В таком случае $\tilde{\varphi}\rho = \tilde{f}$, но $\phi$ — единственное отображение, обладающее соответствующим свойствим, откуда $\varphi = \tilde{\varphi}$. $\square$

**Определение.** $t\colon U\times V\to T$ называют *каноническим билинейным отображением.* Широко используется обозначение $t(u,v)=: u\otimes v$.

**Следствие 1.** *Множество $\{u\otimes v\mid u\in U, v\in V\}$ порождает $U\otimes_k V$ как $k$-модуль.*

*Доказательство.* Следует из того, что $U\times V$ порождает $F\langle U\times V\rangle$. $\square$

**Следствие 2.** *$U\otimes_k V\simeq V\otimes_k U$ как $k$-модули.*

*Доказательство.* Рассмотрим следующую диаграмму:

$$\begin{tikzcd} U\times V \arrow[r, "t"] \arrow[dr, "t'"'] & U\otimes_k V \arrow[d, shift right, "\sigma"'] \\ & V\otimes_k U \arrow[u, shift right, "\tau"'] \end{tikzcd}$$

Положим $t\colon (u,v)\mapsto u\otimes v$ и $t'\colon (u,v)\mapsto v\otimes u$ — билинейные отображения. Тогда $\exists!$ $k$-гомоморфизмы $\sigma$ и $\tau$, т.ч. $\sigma t=t'$ и $\tau t'=t$, откуда $\sigma(u\otimes v)=v\otimes u$ и $\tau(v\otimes u)=u\otimes v$ соответственно. В таком случае $\sigma\tau(u\otimes v)=u\otimes v$ и при этом $\{u\otimes v\mid u\in u, v\in V\}$ порождает $U\otimes V$, откуда $\sigma\tau=\mathrm{id}_{U\otimes V}$. Аналогично, $\tau\sigma=\mathrm{id}_{V\otimes U}$ и $\sigma$ — искомый изоморфизм. $\square$

*Пример.*

а) Пусть $k$ — коммутативное кольцо с единицей, $U$ — $k$-модуль. Тогда $k\otimes_k U\simeq U$.

*Доказательство.* Рассмотрим $f\colon k\times U\to U$, т.ч. $f(\alpha,u)=\alpha u$. Рассмотрим дополнительно следующую диаграмму:

$$\begin{tikzcd} k\times U \arrow[rr, "t"] \arrow[dr, "f"'] & & k\otimes U \arrow[dl, dashed, "\sigma"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

Согласно универсальному свойству, $\exists!\sigma\colon k\otimes U\to U$, т.ч. $f=\sigma t$.

Рассмотрим $\tau\colon U\to k\otimes U$, т.ч. $u\mapsto 1\otimes u$. Тогда $\tau\sigma(\alpha\otimes u)=\tau\sigma t(\alpha,u)=\tau f(\alpha,u)=\tau(\alpha u)=\alpha(1\otimes u)=\alpha\otimes u$. Аналогично, $\sigma\tau(u)=\sigma(1\otimes u)=\sigma t(1,u)=f(1,u)=u$, и $\sigma$ — изоморфизм. $\square$

б) Пусть $k=\mathbb{Z}$, $U=\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, $V=\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ и $(m,n)=1$. Тогда $U\otimes_{\mathbb{Z}} V=\{0\}$.

*Доказательство.* $(m,n)=1\rightsquigarrow \exists r,s\in\mathbb{Z}\colon 1=mr+ns\rightsquigarrow \forall u\in U, v\in V\ u\otimes v=1\cdot(u\otimes v)=r\cdot(mu)\otimes v+s\cdot u\otimes(nv)=r\cdot 0\otimes v+s\cdot u\otimes 0=0$. $\square$

## 10.2. Тензорное произведение гомоморфизмов

**Определение.** $k$ — коммутативное кольцо с единицей. Пусть $\alpha\colon U_1\to U_2$ и $\beta\colon V_1\to V_2$ — гомоморфизмы $k$-модулей. Рассмотрим отображение $\alpha\times\beta\colon U_1\times V_1\to U_2\times V_2$, т.ч. $(u,v)\mapsto(\alpha(u),\beta(v))$. Пусть $t_1\colon U_1\times V_1\to U_1\otimes_k V_1$ и $t_2\colon U_2\times V_2\to U_2\otimes_k V_2$ — канонические билинейные отображения. Рассмотрим следующую диаграмму:

$$\begin{tikzcd} U_1\times V_1 \arrow[rr, "t_1"] \arrow[dr, "t_2\circ(\alpha\times\beta)"'] & & U_1\otimes_k V_1 \arrow[dl, dashed, "\alpha\otimes\beta"] \\ & U_2\otimes_k V_2 & \end{tikzcd}$$

Ясно, что $t_2\circ(\alpha\times\beta)$ билинейно. Тогда $\exists!\alpha\otimes\beta\colon U_1\otimes_k V_1\to U_2\otimes_k V_2$, т.ч. $t_2\circ(\alpha\times\beta)=(\alpha\otimes\beta)\circ t_1$. $\alpha\otimes\beta$ называется *тензорным произведением гомоморфизмов.*

**Теорема 1.** $\mathrm{id}_{U_1} \otimes \mathrm{id}_{V_1} = \mathrm{id}_{U_1 \otimes_k V_1}$.

*Доказательство.* Имеем

$$\begin{aligned} t_2 \circ (\mathrm{id}_{U_1} \times \mathrm{id}_{V_1}) &\colon (u, v) \mapsto (u, v) \mapsto u \otimes v \\ \mathrm{id}_{U_1 \otimes_k V_1} \circ t_1 &\colon (u, v) \mapsto u \otimes v \mapsto u \otimes v \end{aligned}$$

откуда $\mathrm{id}_{U_1 \otimes_k V_1} = \mathrm{id}_{U_1} \otimes \mathrm{id}_{V_1}$. $\square$

**Теорема 2.** *Пусть даны $k$-гомоморфизмы:*

$$U_1 \xrightarrow{\alpha_1} U_2 \xrightarrow{\alpha_2} U_3$$
$$V_1 \xrightarrow{\beta_1} V_2 \xrightarrow{\beta_2} V_3$$

*Тогда* $(\alpha_2\alpha_1) \otimes (\beta_2\beta_1) = (\alpha_2 \otimes \beta_2) \circ (\alpha_1 \otimes \beta_1)$.

*Доказательство.* Построим следующую (заведомо коммутативную) диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
 & U_1 \times V_1 \arrow[r, "t_1"] \arrow[d, "\alpha_1 \times \beta_1"] \arrow[dl, "(\alpha_2\alpha_1)\times(\beta_2\beta_1)"'] & U_1 \otimes V_1 \arrow[d, "\alpha_1 \otimes \beta_1"] & \\
 & U_2 \times V_2 \arrow[r, "t_2"] \arrow[dl, "\alpha_2 \times \beta_2"] & U_2 \otimes V_2 \arrow[dr, "\alpha_2 \otimes \beta_2"] & \\
U_3 \times V_3 \arrow[rrr, "t_3"] & & & U_3 \otimes V_3
\end{tikzcd}$$

Тогда $(\alpha_2 \otimes \beta_2) \circ (\alpha_1 \otimes \beta_1) \circ t_1 = t_3 \circ ((\alpha_2\alpha_1) \times (\beta_2\beta_1))$, откуда $(\alpha_2\alpha_1) \otimes (\beta_2\beta_1) = (\alpha_2 \otimes \beta_2) \circ (\alpha_1 \otimes \beta_1)$. $\square$

**Теорема 3.** *Пусть $\alpha$ и $\beta$ — изоморфизмы, тогда $\alpha \otimes \beta$ — изоморфизм.*

*Доказательство.* $(\alpha \otimes \beta) \circ (\alpha^{-1} \otimes \beta^{-1}) = (\alpha\alpha^{-1}) \otimes (\beta\beta^{-1}) = \mathrm{id}_{U_1} \otimes \mathrm{id}_{V_1} = \mathrm{id}_{U_1 \otimes V_1}$. Аналогично, $(\alpha^{-1} \otimes \beta^{-1}) \circ (\alpha \otimes \beta) = \mathrm{id}_{U_2 \otimes V_2}$. $\square$

**Теорема 4.** $\alpha \otimes \beta = (\alpha \otimes \mathrm{id}_{V_1}) \circ (\mathrm{id}_{U_1} \otimes \beta) = (\mathrm{id}_{U_1} \otimes \beta) \circ (\alpha \otimes \mathrm{id}_{V_1})$.

*Доказательство.* Очевидно[1]. $\square$

**Теорема 5.** *Пусть* $\alpha_1, \alpha_2 \in {}_K\operatorname{Hom}(U_1, U_2), \beta \in {}_K\operatorname{Hom}(V_1, V_2)$. *Тогда* $(\alpha_1 + \alpha_2) \otimes \beta = \alpha_1 \otimes \beta + \alpha_2 \otimes \beta$.

*Доказательство.* $((\alpha_1 + \alpha_2) \otimes \beta) \circ t_1 = t_2 \circ ((\alpha_1 + \alpha_2) \times \beta) = t_2 \circ (\alpha_1 \times \beta) + t_2 \circ (\alpha_2 \times \beta) = (\alpha_1 \otimes \beta) \circ t_2 + (\alpha_2 \otimes \beta) \circ t_2 = (\alpha_1 \otimes \beta + \alpha_2 \otimes \beta) \circ t_2$, откуда $(\alpha_1 + \alpha_2) \otimes \beta = \alpha_1 \otimes \beta + \alpha_2 \otimes \beta$. $\square$

## 10.3. Аддитивность функтора тензорного произведения

**Лемма.** $R$ — а.к. с единицей. Рассмотрим диаграмму из $R$-модулей и $R$-гомоморфизмов:

$$\begin{tikzcd} U_1 \arrow[r, shift left, "i_1"] & V \arrow[l, shift left, "p_1"] \arrow[r, shift left, "p_2"] & U_2 \arrow[l, shift left, "i_2"] \end{tikzcd} \qquad (\natural)$$

Предположим, что

а) $p_1 i_1 = \mathrm{id}_{U_1}$,

б) $p_2 i_2 = \mathrm{id}_{U_2}$,

в) $i_1 p_1 + i_2 p_2 = \mathrm{id}_V$.

Тогда ${}_R V \simeq U_1 \oplus U_2$.

[1] На самом деле — ни хера

*Доказательство.* Построим пару отображений $\sigma\colon U_1\oplus U_2\to V$ и $\tau\colon V\to U_1\oplus U_2$, т.ч. $\sigma(u_1,u_2)\coloneqq i_1(u_1)+i_2(u_2)$ и $\tau(v)\coloneqq(p_1(v),p_2(v))$. Тогда $\sigma\tau(v)=(i_1p_1+i_2p_2)(v)=v$, а $\tau\sigma(u_1,u_2)=\tau(i_1(u_1)+i_2(u_2))=\tau i_1(u_1)+\tau i_2(u_2)=(p_1i_1(u_1),0)+(0,p_2i_2(u_2))=(u_1,0)+(0,u_2)=(u_1,u_2)$, откуда $\sigma$ — искомый изоморфизм. □

**Определение.** Диаграмму вида (♮), для которой выполняются вышеуказанные соотношения, называют *диаграммой прямой суммы.*

**Теорема.** *Пусть $U_1,U_2,V$ — $k$-модули, где $k$ — коммутативное кольцо с единицей. Тогда $(U_1\oplus U_2)\otimes_k V\simeq(U_1\otimes_k V)\oplus(U_2\otimes_k V)$.*

*Доказательство.* Для $U_1\oplus U_2$ рассмотрим диаграмму прямой суммы:

$$\begin{tikzcd} U_1 \arrow[r, shift left, "i_1"] & U_1\oplus U_2 \arrow[l, shift left, "p_1"] \arrow[r, shift right, "p_2"'] & U_2 \arrow[l, shift right, "i_2"'] \end{tikzcd}$$

Здесь:

$$\begin{array}{ll} i_1(u)\coloneqq(u,0) & p_1(u_1,u_2)\coloneqq u_1 \\ i_2(u)\coloneqq(0,u) & p_2(u_1,u_2)\coloneqq u_2 \end{array}$$

Рассмотрим дополнительно:

$$\begin{array}{ll} \tilde{i_1}\coloneqq i_1\otimes\mathrm{id}_V & \tilde{p_1}\coloneqq p_1\otimes\mathrm{id}_V \\ \tilde{i_2}\coloneqq i_2\otimes\mathrm{id}_V & \tilde{p_2}\coloneqq p_2\otimes\mathrm{id}_V \end{array}$$

и соответствующую диаграмму прямой суммы:

$$\begin{tikzcd} U_1\otimes V \arrow[r, shift left, "\tilde{i_1}"] & (U_1\oplus U_2)\otimes V \arrow[l, shift left, "\tilde{p_1}"] \arrow[r, shift right, "\tilde{p_2}"'] & U_2\otimes V \arrow[l, shift right, "\tilde{i_2}"'] \end{tikzcd}$$

Тогда $\tilde{p_1}\tilde{i_1}=(p_1\otimes\mathrm{id}_V)\circ(i_1\otimes\mathrm{id}_V)=p_1i_1\otimes\mathrm{id}_V=\mathrm{id}_{U_1}\otimes\mathrm{id}_V=\mathrm{id}_{U_1\otimes V}$; аналогично $\tilde{p_2}\tilde{i_2}=\mathrm{id}_{U_2\otimes V}$. Имеем $\tilde{i_1}\tilde{p_1}+\tilde{i_2}\tilde{p_2}=(i_1\otimes\mathrm{id}_V)\circ(p_1\otimes\mathrm{id}_V)+(i_2\otimes\mathrm{id}_V)\circ(p_2\otimes\mathrm{id}_V)=(i_1p_1)\otimes\mathrm{id}_V+(i_2p_2)\otimes\mathrm{id}_V=(i_1p_1+i_2p_2)\otimes\mathrm{id}_V=\mathrm{id}_{U_1\oplus U_2}\otimes\mathrm{id}_V=\mathrm{id}_{(U_1\oplus U_2)\otimes V}$. Таким образом, последняя рассмотренная диаграмма действительно является диаграммой прямой суммы, и указанный изоморфизм доказан. □

## 10.4. Тензорное произведение свободных модулей

**Теорема.** *Пусть $k$ — коммутативное кольцо с единицей, ${}_kU,{}_kV$ — свободные модули рангов $m\in\mathbb{N}$ и $n\in\mathbb{N}$ соответственно. Тогда $U\otimes_k V$ — свободный $k$-модуль ранга $mn$.*

*Доказательство.* Ясно, что ${}_kU\simeq k^{\oplus m}$, ${}_kV\simeq k^{\oplus n}$. Тогда $U\otimes V\simeq k^{\oplus m}\otimes k^{\oplus n}\simeq(k\otimes k^{\oplus n})^{\oplus m}\simeq(k^{\oplus n})^{\oplus m}\simeq k^{\oplus mn}$. □

## 10.5. Теорема об изоморфизме сопряженности

**Определение.** Пусть $k$ — коммутативное кольцо с единицей, $U,V,W$ — $k$ модули. Множество всех билинейных отображений $U\times V\to W$ будем обозначать $\mathrm{Bi}(U,V;W)$. На этом множестве введем структуру $k$-модуля через поточечное сложение и умножение на скаляр.

**Теорема.** *Пусть $k$ — коммутативное кольцо с единицей, $U,V,W$ — $k$-модули. Тогда существуют изоморфизмы $k$-модулей:*

$${}_k\mathrm{Hom}(U\otimes_k V,W)\xrightarrow{\lambda}{}_k\mathrm{Bi}(U,V,W)\xrightarrow{\mu}{}_k\mathrm{Hom}(U,{}_k\mathrm{Hom}(V,W))$$

*Доказательство.*

**а)** Построим $\lambda$. Пусть $g \in \operatorname{Hom}(U \otimes V, W)$, $t\colon U \times V \to U \otimes V$ — каноническое билинейное отображение. Рассмотрим следующую диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
U \times V \arrow[rr, "t"] \arrow[dr, dashed, "g \circ t"'] & & U \otimes V \arrow[dl, "g"] \\
& W &
\end{tikzcd}$$

Так как $t$ билинейно, а $g$ — гомоморфизм, то $g \circ t$ билинейно. Положим $\lambda(g) \coloneqq g \circ t$. $\lambda$ обратимо по универсальному свойству тензорного произведения. Ясно, что $\lambda$ является $k$-гомоморфизмом, следовательно $\lambda$ — изоморфизм.

**б)** Построим $\mu$. Пусть $f \in \operatorname{Bi}(U, W; W)$. Положим $(\mu(f)(u))(v) \coloneqq f(u, v)$. $\mu(f)(u)$ и $\mu(f)$ являются $k$-гомоморфизмами вследствие билинейности $f$. Также ясно, что $\mu$ — $k$-гомоморфизм. Рассмотрим $\nu\colon \operatorname{Hom}(U, \operatorname{Hom}(V, W)) \to \operatorname{Bi}(U, V; W)$, т.ч. $(\nu(h))(u, v) \coloneqq (h(u))(v)$. Ясно, что $\nu(h)$ билинейно, а $\nu$ является $k$-гомоморфизмом. Тогда:

$$(\nu\mu(f))(u, v) = ((\mu(f))(u))(v) = f(u, v) \rightsquigarrow \nu\mu = \mathrm{id}_{\operatorname{Bi}(U,V;W)}$$
$$(\mu\nu(h))(u)(v) = (\nu(h))(u, v) = h(u)(v) \rightsquigarrow \mu\nu = \mathrm{id}_{\operatorname{Hom}(U,\operatorname{Hom}(V,W))}$$

и $\mu$ — изоморфизм.

$\square$

**Определение.** Отображение $\mu\lambda$ называется *изоморфизмом сопряженности.*

## 10.6. Базис тензорного произведения линейных пространств

**Теорема.** *$K$ — поле, $U, V$ — конечномерные линейные пространства. Пусть $B_1 = \{u_i\}_{i=1}^m$ и $B_2 = \{v_i\}_{i=1}^n$ — базисы $U$ и $V$ соответственно. Тогда $B_1 \otimes B_2 \coloneqq \{u_i \otimes v_j\}_{i=1..m,\ j=1..n}$ — базис $U \otimes_K V$.*

*Доказательство.* Известно, что $U \otimes V = {}_K\langle \{u \otimes v \mid u \in U, v \in V\}\rangle$. Имеем $u \otimes v = \left(\sum_{i=1}^m \alpha_i u_i\right) \otimes \left(\sum_{j=1}^n \beta_j v_j\right) = \sum_{i,j=1}^{m,n} \alpha_i \beta_j (u_i \otimes v_j)$. Таким образом, $U \otimes V = {}_K\langle B_1 \otimes B_2\rangle$. При этом известно, что $\dim_K(U \otimes_K V) = mn = \#(B_1 \otimes B_2)$. Следовательно, $B_1 \otimes B_2$ — базис. $\square$

## 10.7. Кронекерово произведение матриц, связь с тензорным произведением линейных операторов. Кронекерово произведение матриц Адамара

**Определение.** Пусть $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(K)$, $C = (c_{ij}) \in M_{k,l}(K)$. *Кронекерово произведение $A$* и $C$ — это матрица $A \otimes C \in M_{mn,kl}(K)$, допускающая разбиение на $k \times l$-блоки, т.ч. $A \otimes C = \{B_{ij}\}_{i,j=1}^{m,n}$, где $B_{ij} = a_{ij} C$.

*Замечание.* Матрицу $A \otimes C$ можно явно представить в виде:

$$(A \otimes C)[i, j] = A\left[\left\lfloor \frac{i-1}{k} \right\rfloor + 1,\ \left\lfloor \frac{j-1}{l} \right\rfloor + 1\right] \cdot C\left[i - k \cdot \left\lfloor \frac{i-1}{k} \right\rfloor,\ j - l \cdot \left\lfloor \frac{j-1}{l} \right\rfloor\right]$$

или

$$(A \otimes C)[i, j] = A[(i-1)\,\mathbf{div}\,k + 1, (j-1)\,\mathbf{div}\,l + 1] \cdot C[(i-1)\,\mathbf{mod}\,k + 1, (j-1)\,\mathbf{mod}\,l + 1]$$

где $a\,\mathbf{div}\,b \coloneqq \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor$, $a\,\mathbf{mod}\,b \coloneqq a - b \cdot (a\,\mathbf{div}\,b)$.

**Теорема 1.** *Пусть $U$ и $V$ — $K$-линейные пространства, $a$ и $c$ — операторы на $U$ и $V$ соответственно. Пусть дополнительно $B = \{u_i\}_{i=1}^m$ и $B' = \{v_j\}_{j=1}^n$ — базисы ${}_KU$ и ${}_KV$ соответственно. Положим $A = (a_{ij}) \coloneqq [a]_B$, $B = (b_{ij}) \coloneqq [c]_B$. Упорядочим $B \otimes B'$ по строкам: $((1,1),\ldots,(1,n),(2,1),\ldots,\ldots,(m,n))$. Тогда $[a \otimes c]_{B\times B'} = A \otimes C$.*

*Доказательство.* Обозначим $B \otimes B' = \{w_t\}_{t=1}^{mn} = \{u_i \otimes v_j\}_{i,j=1}^{m,n}$. Заметим, что $i$ и $j$ можно выразить через $t$:

$$i = \left\lfloor \frac{t-1}{n} \right\rfloor + 1, \quad j = t - n\left\lfloor \frac{t-1}{n} \right\rfloor \tag{1}$$

Имеем $(a\otimes c)(w_t) = (a\otimes c)(u_i\otimes v_j) = a(u_i)\otimes c(v_j) = (\sum_{k=1}^m a_{ki}u_k)\otimes(\sum_{l=1}^n c_{lj}v_l) = \sum_{k,l=1}^{m,n} a_{ki}c_{lj}(u_k\otimes v_l)$. Но $u_k \otimes v_l = w_s$, где $s$ удовлетворяет соотношениям:

$$k = \left\lfloor \frac{s-1}{n} \right\rfloor + 1, \quad l = s - n\left\lfloor \frac{s-1}{n} \right\rfloor \tag{2}$$

Так, $([a\otimes c]_{B\otimes B'})[s,t] = a_{ki}c_{lj} \overset{(1)\text{ и }(2)}{=} (A\otimes C)[s,t]$. □

**Определение.** $C \in M_n(\mathbb{Z})$ называется *матрицей Адамара*, если она состоит из $\pm1$ и $C^TC = nE_n$.

*Пример.*

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

**Теорема 2.** *Пусть $A$ и $B$ — матрицы Адамара размеров $m$ и $n$ соответственно, тогда $A\otimes B$ — матрица Адамара размера $mn$.*

*Доказательство.* Ясно, что $A\otimes B$ состоит из $\pm1$. Она имеет вид:

$$A\otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1m}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mm}B \end{pmatrix}$$

При этом $((A\otimes B)^T(A\otimes B))\overbrace{[i,j]}^{\text{блок}} = \sum_{k=1}^m a_{ki}a_{kj}B^TB = (M^TM)[i,j]\cdot N^TN = m\delta_{ij}N^TN$, т.е. $(A\otimes B)^T(A\otimes B)$ имеет блочно-диагональную форму. При этому $(N^TN)[k,l] = n\delta_{kl}$, то есть каждый блок диагонален. Ясно, что каждый диагональный элемент имеет значение $mn$, и $A\otimes B$ — матрица Адамара. □

## 10.8. Дуальные пространства и тензорное произведение

**Теорема.** *Пусть $U$ и $V$ — конечномерные $K$-пространства. Тогда:*

*а) Существует изоморфизм $\sigma\colon U^*\otimes V^* \to (U\otimes V)^*$, т.ч. $\sigma(\varphi\otimes\psi)(u\otimes v) = \varphi(u)\psi(v)$.*

*б) Существует изоморфизм $\tau\colon U^*\otimes V \to {}_K\operatorname{Hom}(U,V)$, т.ч. $\tau(\varphi\otimes v)(u) = \varphi(u)\cdot v$.*

*Доказательство.*

**а)** Пусть $\varphi\in U^*$, $\psi\in V^*$. Рассмотрим изображение $\tilde{\alpha}_{\phi,\psi}\colon U\times V\to K$, т.ч. $(u,v)\mapsto\varphi(u)\psi(v)$. Рассмотрим следующую диаграмму:

$$\begin{tikzcd} U\times V \arrow[rr, "\otimes"] \arrow[dr, "\tilde{\alpha}_{\varphi,\psi}"'] & & U\otimes V \arrow[dl, dashed, "\alpha_{\varphi,\psi}"] \\ & K & \end{tikzcd}$$

По универсальному свойству тензорного произведения $\exists! \alpha_{\varphi,\psi} \in (U \otimes V)^*$, т.ч. $u \otimes v \mapsto \tilde{\alpha}_{\varphi,\psi}(u,v) = \varphi(u)\psi(v)$.

Введем отображение $\sigma_0 \colon U^* \times V^* \to (U \otimes V)^*$, т.ч. $(\varphi, \psi) \mapsto \alpha_{\varphi,\psi}$. Рассмотрим следующую диаграмму:

$$\begin{tikzcd} U^* \times V^* \arrow[r, "\otimes"] \arrow[dr, "\sigma_0"'] & U^* \otimes V^* \arrow[d, dashed, "\sigma"] \\ & (U \otimes V)^* \end{tikzcd}$$

Ясно, что $\exists! \sigma \colon U^* \otimes V^* \to (U \otimes V)^*$, т.ч. $\varphi \otimes \psi \mapsto \sigma_0(\varphi, \psi) = \alpha_{\varphi,\psi}$. Следовательно, $\sigma(\varphi \otimes \psi)(u \otimes v) = \alpha_{\varphi,\psi}(u \otimes v) = \tilde{\alpha}_{\varphi,\psi}(u,v) = \varphi(u)\psi(v)$.

Покажем, что $\sigma$ — эпиморфизм. Пусть $B_1 = \{u_i\}_{i=1}^m$ и $B_2 = \{v_j\}_{j=1}^n$ — базисы ${}_K U$ и ${}_K V$, а $B_1^* = \{\varphi_i\}_{i=1}^m$ и $B_2^* = \{\psi_j\}_{j=1}^n$ — базисы ${}_K U^*$ и ${}_K V^*$. Пусть $B_1 \otimes B_2$ — базис $U \otimes V$.

Рассмотрим $B_1^* \otimes B_2^*$. Имеем $\sigma(\varphi_k \otimes \psi_l)(u_i \otimes v_j) = \varphi_k(u_i)\psi_l(v_j) = \delta_{ki}\delta_{lj} = \delta_{(i,j);(k,l)}$. Из этого следует, что $\sigma(B_1^* \otimes B_2^*)$ — дуальный к $B_1 \otimes B_2$ базис. Тогда $\operatorname{Im} \sigma \supset {}_K \langle \sigma(B_1^* \otimes B_2^*) \rangle = (U \otimes V)^*$, т.е. $\sigma$ эпиморфно. Так как $\dim_K(U^* \otimes V^*) = \dim_K(U \otimes V)^*$, то $\sigma$ — изоморфизм.

**б)** Пусть $\varphi \in U^*$, $v \in V$. Рассмотрим отображение $\tilde{\tau} \colon U^* \times V \to {}_K \operatorname{Hom}(U, V)$, т.ч. $\tilde{\tau}(\varphi, v)(u) = \varphi(u)v$. Рассмотрим следующую диаграмму:

$$\begin{tikzcd} U^* \times V \arrow[r, "\otimes"] \arrow[dr, "\tilde{\tau}"'] & U^* \otimes V \arrow[d, dashed, "\tau"] \\ & \operatorname{Hom}(U, V) \end{tikzcd}$$

Видно, что $\exists! \tau \colon U^* \otimes V \to \operatorname{Hom}(U, V)$, т.ч. $\tau(\varphi \otimes v) = \tilde{\tau}(\varphi, v)$. Покажем, что $\tau$ — эпиморфизм. Пусть $f \in \operatorname{Hom}(U, V)$. Воспользуемся базисом из предыдущего пункта. Пусть $[f]_{B,B'} = (\alpha_{ij})$. Тогда:

$$f(u_j) = \sum_i a_{ij} v_i = \sum_i a_{ij} \sum_k \varphi_k(u_j) v_i = \sum_{i,k} a_{ij} \tau(\varphi_k \otimes v_i)(u_i) = \tau\left(\sum_{i,k} a_{ij}(\varphi_k \otimes v_i)\right)(u_i)$$

Таким образом, $\tau$ — эпиморфизм, а следовательно, и изоморфизм.

$\square$

## 10.9. Согласованные замены базисов в линейном пространстве и пространстве функционалов. Контрградиентная матрица

**Теорема.** *Пусть $B_1 = \{u_i\}_{i=1}^n$ и $B_2 = \{v_j\}_{j=1}^n$ — базисы $K$-пространства $L$, $B_1^* = \left\{\varphi^i\right\}_{i=1}^n$ и $B_2^* = \left\{\psi^j\right\}_{j=1}^n$ — соответствующие дуальные базисы $L$. Пусть $B_1 \overset{C}{\rightsquigarrow} B_2$. Тогда $B_1^* \overset{C^{-1T}}{\rightsquigarrow} B_2^*$.*

*Доказательство.* Докажем, что $B_2^* \overset{C^T}{\rightsquigarrow} B_1^*$. Пусть $B_2^* \overset{D=(d_{ij})}{\rightsquigarrow} B_1^*$. Тогда $\varphi^i(v_j) = \varphi^i\left(\sum_k c_{kj} u_k\right) = \sum_k c_{kj} \varphi^i(u_k) = c_{ij}$. С другой стороны, $\varphi^i(v_j) = \sum_l d_{li} \psi^l(v_j) = d_{ji}$, откуда $d_{ij} = c_{ji}$ и $D = C^T$. $\square$

**Определение.** Для $C \in M_n(K)^*$ матрица $\hat{C} \coloneqq C^{-1T}$ называется *контраградиентной* к $C$.

## 10.10. Координаты тензора, классическое определение тензора

**Определение.** $L$ — конечномерное $K$-пространство, $(p, q) \in \mathbb{Z}_+^2 \setminus \{(0,0)\}$. Положим $T_p^q \coloneqq T_p^q(L) \coloneqq (L^*)^{\otimes p} \otimes L^{\otimes q}$. Элементы пространства $T_p^q$ называются *$p$ раз ковариантными, $q$ раз контравариантными тензорами.* Число $p + q$ называется *валентностью* $T \in T_p^q$.

*Замечание.* Справедливы следующие утверждения:

а) $\dim_K T_p^q(L) = (\dim_K L)^{p+q}$.

б) Существует цепочка изоморфизмов:

$$T_p^q(L) \xrightarrow{f} (L^*)^{\otimes p} \otimes (L^{**})^{\otimes q} \xrightarrow{\sigma} (L^{\otimes p} \otimes (L^*)^{\otimes q})^* \xrightarrow{\lambda} {}_K\operatorname{Poly}(L^p, (L^*)^q; K)$$

такая, что:

1. $f(\varphi_1 \otimes \ldots \otimes \varphi_p \otimes u_1 \otimes \ldots \otimes u_q) = \varphi_1 \otimes \ldots \otimes \varphi_p \otimes \delta_{u_1} \otimes \ldots \otimes \delta_{u_q}$, где $\delta_{u_i}(\varepsilon) = \varepsilon(u_1)$.
2. $\sigma(\varphi_1 \otimes \ldots \otimes \varphi_p \otimes \psi_1 \otimes \ldots \otimes \psi_q)(u_1 \otimes \ldots \otimes u_p \otimes g_1 \otimes \ldots \otimes g_q) = \varphi_1(u_1) \cdot \ldots \cdot \varphi_p(u_p) \cdot \psi_1(g_1) \cdot \ldots \cdot \psi_q(g_q)$.
3. $\lambda(\varepsilon)(u_1, \ldots, u_p, \varphi_1, \ldots, \varphi_q) = \varepsilon(u_1 \otimes \ldots \otimes u_p \otimes \varphi_1 \otimes \ldots \otimes \varphi_q)$.

Положим $\theta = \lambda\sigma f$. Тогда справедлива формула:

$$\begin{aligned}
&\theta(\varphi_1 \otimes \ldots \otimes \varphi_p \otimes u_1 \otimes \ldots \otimes u_q)(\tilde{u_1}, \ldots, \tilde{u_p}, \tilde{\varphi}_1, \ldots, \tilde{\varphi}_q) \\
&= \lambda \circ \sigma(\varphi_1 \otimes \ldots \otimes \varphi_p \otimes \delta_{u_1} \otimes \ldots \otimes \delta_{u_j})(\tilde{u_1}, \ldots, \tilde{u_p}, \tilde{\varphi}_1, \ldots, \tilde{\varphi}_q) \\
&= \sigma(\varphi_1 \otimes \ldots \otimes \varphi_p \otimes \delta_{u_1} \otimes \ldots \otimes \delta_{u_q})(\tilde{u_1} \otimes \ldots \otimes \tilde{u_p} \otimes \tilde{\varphi}_1 \ldots \otimes \tilde{\varphi}_q) \\
&= \varphi_1(\tilde{u_1}) \cdot \ldots \cdot \varphi_p(\tilde{u_p}) \cdot \delta_{u_1}(\tilde{\varphi}_1) \cdot \ldots \cdot \delta_{u_q}(\tilde{\varphi}_q) \\
&= \varphi_1(\tilde{u_1}) \cdot \ldots \cdot \varphi_p(\tilde{u_p}) \cdot \tilde{\varphi}_1(u_1) \cdot \ldots \cdot \tilde{\varphi}_q(u_q)
\end{aligned}$$

**Определение.** Пусть $L$ — $K$-линейное пространство, $T \in T_p^q(L)$. Пусть $B = \{u_i\}_{i=1}^n$ — базис ${}_K L$, $B^* = \left\{\varphi^i\right\}_{i=1}^n$ — дуальный к нему. Положим $\tilde{B} \coloneqq (B^*)^{\otimes p} \otimes B^{\otimes q}$ — базис ${}_K T_p^q(L)$. Рассмотрим разложение $T$ по базисным тензорным произведениям из $\tilde{B}$:

$$T = T_{i_1,\ldots,i_p}^{j_1,\ldots,j_p} \cdot \varphi^{i_1} \otimes \ldots \otimes \varphi^{i_p} \otimes u_{j_1} \otimes \ldots \otimes u_{j_q}$$

Набор коэффициентов $\{T_{i_1,\ldots,i_p}^{j_1,\ldots,j_q}\}$ называется *координатами (компонентами)* тензора $T$ относительно базиса $B$.

**Теорема.** *Пусть $L$ — $K$-пространство, $B_1 = \{u_1\}_{i=1}^n$ и $B_2 = \{v_i\}_{i=1}^n$ — базисы ${}_K L$. Пусть $B \overset{C}{\rightsquigarrow} B'$, $C = (c_j^i)$, $\hat{C} = (\hat{c}_i^j)$. Предположим $\{T_{i_1,\ldots,i_p}^{j_1,\ldots,j_q}\}$ и $P_{r_1,\ldots,r_p}^{s_1,\ldots,s_q}$ — компоненты $T \in T_p^q(L)$ относительно $B_1$ и $B_2$ соответственно. Тогда:*

$$P_{r_1,\ldots,r_p}^{s_1,\ldots,s_q} = T_{i_1,\ldots,i_p}^{j_1,\ldots,j_q} \cdot c_{r_1}^{i_1} \cdot \ldots \cdot c_{r_p}^{i_p} \cdot \hat{c}_{j_1}^{s_1} \cdot \ldots \cdot \hat{c}_{j_q}^{s_q}$$

*Доказательство.* Имеем $\hat{c}_k^j c_j^i = \sum_j \hat{C}[k,j]C[i,j] = \sum_j C^{-1}[j,k]C[i,j] = (C^{-1}C)[k,i] = \delta_k^i$. В то же время, $v_j = c_j^i u_i$ по определению $C$. Имеем:

$$\hat{c}_k^j v_j = \hat{c}_k^j v_j = \hat{c}_k^j c_j^i u_i = \delta_k^i u_i = u_k \tag{1}$$

Пусть базисы $B_1^* = \left\{\varphi^j\right\}_{j=1}^n$ и $B_2^* = \left\{\psi^j\right\}_{j=1}^n$ — дуальные к $B_1$ и $B_2$ соответственно. По теореме о согласованной замене базисов ${}_K L$ и ${}_K L^*$ имеем $\psi^j = \hat{c}_i^j \varphi^i$. В то же время, $c_j^k \hat{c}_i^j = \sum_j C[k,j]\hat{C}[i,j] = \sum_j C[k,j]C^{-1}[j,i] = (CC^{-1})[k,i] = \delta_i^k$. Тогда:

$$c_j^k \psi^j = c_j^k \hat{c}_i^j \varphi^i = \delta_i^k \varphi^i = \varphi^k \tag{2}$$

Рассмотрим разложение $T$ по базису $B_1$:

$$T = T_{i_1,\ldots,i_p}^{j_1,\ldots,j_p} \cdot \varphi^{i_1} \otimes \ldots \otimes \varphi^{i_p} \otimes u_{j_1} \otimes \ldots \otimes u_{j_q} \tag{3}$$

Подставим формулы (1) и (2) в (3). Тогда

$$T = T_{i_1,\ldots,i_p}^{j_1,\ldots,j_p} \cdot (c_{r_1}^{i_1} \psi^{r_1}) \otimes \ldots \otimes (c_{r_p}^{i_p} \psi^{r_p}) \otimes (\hat{c}_{j_1}^{s_1} v_{s_1}) \otimes \ldots \otimes (\hat{c}_{j_q}^{s_q} v_{s_q}) \tag{4}$$

откуда искомое равенство ясно по полилинейности. $\square$