1.5 Приложения процесса ортогонализации Грама-Шмидта

1.5.1 Многочлен Лежандра

Определение. $n \in \mathbb{N}_0$. $P_n := \frac{1}{2^n \cdot n!} \frac{d^n}{dx^n}((x^2-1)^n)\,(\in \mathbb{R}[x])$ *назвается* ***многочленом Лежандра (степени*** n***)***.

Замечание.

1. Ясно, что $\deg P_n = n$.

2. Можно доказать (упр.), что $\forall n \in \mathbb{N}_0 P_n(1) = 1$.

   Тут небольшой пропуск

Предложение 12. *В предыдущих обозначениях:*

1. $(P_n, P_n) = 0$ *при* $m \neq n$

2. $||P_n|| = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}$

Доказательство. $\underline{(1)}$ Считаем $m < n$.

$$2^m m! \cdot 2^n n! \cdot (P_m, P_n) = \int_{-1}^{1} \frac{d^m}{dx^m}((x^2-1)^m) \cdot \frac{d^n}{dx^n}((x^2-1)^n)dx =$$

$$= \frac{d^m}{dx^m}((x^2-1)^m) \cdot \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}((x^2-1)^n)\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}((x^2-1)^m) \cdot \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}((x^2-1)^n)dx$$

$$= \dots$$

$$= (-1)^n \int_{-1}^{1} \frac{d^{m+n}}{dx^{m+n}}((x^2-1)^m) \cdot (x^2-1)^n dx = 0$$

$\underline{(2)}$ — упр. □

Замечание.

1. Можно доказать (упр.), что выполняется рекуррентное соотношение:

$$(n+1)P_{n+1} - (2n+1)xP_n + nP_{n-1} = 0 \qquad (1)$$

   (в частности, из (1) с помощью ММИ следует $P_n(1) = 1$)

Так как $P_0 = 1$, $P_1 = x$, то из (1) следует, что $P_n(x)$ — четная (нечетная) функция $\Leftrightarrow n$ — четно (нечетно).

1.5.2 Многочлен Чебышёва

Определение. *Рассмотрим* ${}_{\mathbb{R}}L \coloneqq \mathbb{R}[x]_n$ *и введем скалярное произведение (упр.):*

$$(f,g) \coloneqq \int_{-1}^{1} fg\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Применим процесс ортогонализации Грама-Шмидта к базису $B = \{x^n\}_{n=0}^N = \{1, x, \dots, x^N\}$. *Получаем ортонормированный базис* $\{d_n{\cdot}T_n\}_{n=0}^N$, *где* $T_n(x) \coloneqq \cos(n \arccos x)$, d_n *— ненулевые скаляры.*

Такие T_n *называются* ***многочленами Чебышёва (первого рода; степени*** n***).***

Предложение 13. *В предыдущих обозначениях*

1. $(T_m, T_n) = 0$ *при* $m \neq n$
2. $||T_n|| = \begin{cases} \pi/2, \ n \geq 1 \\ \pi, \ n = 0 \end{cases}$

Доказательство. Упр. □

1.6 Понятие предгильбертова пространства

Определение. *Пара* $({}_{\mathbb{R}}L, F)$ *называется* ***предгильбертовым пространством****, если* ${}_{\mathbb{R}}L$ *— линейное пространство над* $\mathbb{R}$ *(не обязательно конечномерное), а* $F : L \times L \longrightarrow \mathbb{R}$ *— симметрическая положительно определенная билинейная форма.*

Замечание. Некоторые результаты §1 распространяются на предгильбертовы пространства (упр.).

Пример. (контрпример к T5) Пусть ${}_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}[x]$, $(f,g) \coloneqq \int_{-1}^{1} fg dx$. Рассмотрим подпространства:

$$V_{\text{чет}} \coloneqq {}_{\mathbb{R}}\langle \{x^{2i}\}_{i=0}^{\infty} \rangle$$
$$V_{\text{нечет}} \coloneqq {}_{\mathbb{R}}\langle \{x^{2i+1}\}_{i=0}^{\infty} \rangle$$
$$V \coloneqq {}_{\mathbb{R}}\langle \{x^{4i}\}_{i=0}^{\infty} \rangle$$

Можно доказать (упр.), что:

1. $V_{\text{чет}}^{\perp} = V_{\text{нечет}}$,
2. $V_{\text{нечет}}^{\perp} = V_{\text{чет}}$,

3. ясно, что $L = V_{\text{чет}} \oplus V_{\text{нечет}}$,

4. $V^{\perp} = V_{\text{нечет}}$.

Из пунктов *а)* и *г)* следует, что $L \neq V \oplus V^{\perp}$.

2 Унитарные пространства

ПДП $K \coloneqq \mathbb{C}$; все рассмотренные пространства, если не оговорено иное, конечномерны над $\mathbb{C}$.

2.1 Определения и простейшие свойства УП

Определение. *Пара $({}_{\mathbb{C}}L, F)$, где ${}_{\mathbb{C}}L$ — конечномерно над полем комплексных чисел, $F : L \times L \longrightarrow \mathbb{C}$ называется **УП**, если выполняются условия:*

1. $F(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, v) = \alpha_1 F(u_1, v) + \alpha_2 F(u_2, v)$

2. $\forall u, v \in L\ F(u, v) = \overline{F(v, u)}$

3. $\forall u \in L\ F(u, u) \geq 0$

4. $\forall u \in L\ F(u, u) = 0 \Rightarrow u = \mathbf{0}$

*При этом F называют **скалярным произведением** и обозначают сходным образом.*

Замечание. Отображение F, удовлетворяющее первым двум свойствам, называется **эрмитовой формой (от 2-х переменных)**. Для любой эрмитовой формы выполняются соотношения ...

Определение. *Пусть $({}_{\mathbb{C}}L, (-,-))$ — УП. Для $u \in L$ **длина** u — это $||u|| \coloneqq \sqrt{(u,u)}$ $(\in \mathbb{R}_{\geq 0})$. Для $u, v \in L$ **расстояние** между u и v — это $\rho(u,v) \coloneqq ||u - v||$.*

Пример. В качестве ${}_{\mathbb{C}}L = \mathbb{C}^n (\equiv M_{n,1}(\mathbb{C}))$. Положим $(X, Y) \coloneqq X^T \bar{Y} = \sum_{j=1}^{n} x_j \bar{y}_j$, откуда (упр.) $({}_{\mathbb{C}}L, (-,-))$ — УП.

Ясно, что $||X|| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2}$.

Теорема 1. *Пусть $({}_{\mathbb{C}}L, (-,-))$ — УП, $u, v, w \in L$. Тогда*

1. $|(i, v)| \leq ||u|| \cdot ||v||$ *(неравенство Коши-Буняковского)*

2. $||u+v|| \le ||u|| + ||v||$

3. $\rho(u,v) \le \rho(u,w) + \rho(w,v)$ *(нер-во треугольника)*

Доказательство. $\underline{(1)}$ Считаем $v \neq \mathbf{0}$. Для $\forall t \in \mathbb{C}$ имеем $0 \le (u+tv, u+tv) = (u,u) + t \cdot \overline{(v,u)} + \bar{t} \cdot (u,v) + |t|^2 \cdot (v,u)$.

Рассмотрим $t = \lambda \cdot (u,v)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда $0 \le (u,u) + 2\lambda \cdot |(u,v)|^2 + \lambda^2 \cdot |(u,v)|^2 \cdot (v,v)$.

Имеем, $0 \ge \frac{D}{4} = |(u,v)|^4 - ||u||^2 \cdot |(u,v)|^2 \cdot ||v||^2$.

Пункты 2 и 3 — упр. (см. доказательство Т1 §1) □

MEMASIKI