RECOLTES ET SEMAILLES

Réflexions et témoignage
sur un passé de mathématicien

par
Alexandre GROTHENDIECK

Présentation des Thèmes

ou

PRELUDE EN QUATRE MOUVEMENTS

Fascicule 0_1 **:**

En guise d'avant-propos
Promenade à travers une œuvre — ou l'enfant et la Mère
Epilogue en post-scriptum — ou contexte et préalables d'un débat

Université des Sciences et Techniques du Languedoc, Montpellier
et Centre National de la Recherche Scientifique

À mes Parents

RECOLTES ET SEMAILLES : Présentation des Thèmes

ou

Prélude en quatre Mouvements

(Sommaire)

En guise d'Avant-Propos. . . A 1 ⟨5⟩

Promenade à travers une œuvre — ou l'enfant et la Mère

1. La magie des choses P 1 ⟨9⟩
2. L'importance d'être seul P 5 ⟨11⟩
3. L'aventure intérieure — ou mythe et témoignage P 7 ⟨12⟩
4. Le tableau de mœurs P 10 ⟨14⟩
5. Les héritiers et le bâtisseur P 11 ⟨14⟩
6. Points de vue et vision P 15 ⟨16⟩
7. La "grande idée" — ou les arbres et la forêt P 17 ⟨18⟩
8. La vision — ou douze thèmes pour une harmonie P 20 ⟨20⟩
9. Forme et structure — ou la voix des choses P 25 ⟨22⟩
10. La géométrie nouvelle — ou les épousailles du nombre et de la grandeur P 28 ⟨24⟩
11. L'éventail magique — ou l'innocence P 31 ⟨26⟩
12. La topologie — ou l'arpentage des brumes P 33 ⟨27⟩
13. Les topos — ou le lit à deux places P 37 ⟨29⟩
14. Mutation de la notion d'espace — ou le souffle et la foi P 40 ⟨31⟩
15. Tous les chevaux du roi. . . P 42 ⟨32⟩
16. Les motifs — ou le cœur dans le cœur P 43 ⟨32⟩
17. A la découverte de la Mère — ou les deux versants P 48 ⟨35⟩
18. L'enfant et la Mère P 52 ⟨37⟩

Epilogue : les Cercles invisibles

19. La mort est mon berceau (ou trois marmots pour un moribond) P 54 ⟨38⟩
20. Coup d'œil chez les voisins d'en face P 56 ⟨40⟩
21. "L'unique" — ou le don de solitude P 61 ⟨42⟩

Une Lettre

1. La lettre de mille pages L 1 ⟨??⟩
2. Naissance de Récoltes et Semailles (une rétrospective-éclair) L 2 ⟨??⟩
3. Le décès du patron — chantiers à l'abandon L 4 ⟨??⟩
4. Un vent d'enterrement. . . L 9 ⟨??⟩
5. Le voyage L 14 ⟨??⟩
6. Le versant d'ombre — ou création et mépris L 16 ⟨??⟩
7. Le respect et la fortitude L 20 ⟨??⟩
8. "Mes proches" — ou la connivence L 23 ⟨??⟩
9. Le dépouillement L 28 ⟨??⟩
10. Quatre vagues dans un mouvement L 31 ⟨??⟩
11. Mouvement et structure L 36 ⟨??⟩
12. Spontanéité et rigueur L 41 ⟨??⟩

Epilogue en Post-scriptum — ou Contexte et Préalables d'un Débat

13. Le spectrographe à bouteilles L 44 ⟨45⟩
14. Trois pieds dans un plat L 46 ⟨46⟩
15. La gangrène — ou l'esprit du temps (1) L 50 ⟨48⟩
16. Amende honorable — ou l'esprit du temps (2) L 52 ⟨49⟩

Table des Matières de Récoltes et Semailles (fascicules 0 à 4) T1 à T 10 ⟨??⟩

Introduction (I) : Le trèfle à cinq feuilles

1. Rêve et accomplissement i ⟨??⟩
2. L'esprit d'un voyage iv ⟨??⟩

3. Boussole et bagages vii ⟨??⟩
4. Un voyage à la poursuite des choses évidentes… viii ⟨??⟩
5. Une dette bienvenue x ⟨??⟩

Introduction (II) : Un acte de respect

6. L'Enterrement xi ⟨??⟩
7. L'Ordonnancement des Obsèques xiv ⟨??⟩
8. La fin d'un secret xvi ⟨??⟩
9. La scène et les Acteurs xix ⟨??⟩
10. Un acte de respect xx ⟨??⟩

N.B. Le présent "fascicule 0_1" de l'édition provisoire de Récoltes et Semailles est destiné (comme la table des matières le montre) à se placer avant le fascicule (tenant lieu de n° 0_2) qui avait été distribué précédemment, sous le titre "Lettre — Introduction" ; à l'exception cependant du "Epilogue en post-scriptum" (numéroté de L 44 à L 56), lequel constitue (comme son nom l'indique) un "post-scriptum" à la "Lettre" (pages L 1 à L 43) ouvrant ce "fascicule 0_2". L'ensemble des deux fascicules constitue la partie introductive de Récoltes et Semailles, appelée "Présentation des Thèmes" ou "Prélude en Quatre Mouvements".

En Guise d'Avant-propos. . . A 1

30 janvier 1986

Il ne manquait plus que l'avant-propos à écrire, pour confier Récoltes et Semailles à l'imprimeur. Et je jure que j'étais de la meilleure volonté du monde pour écrire quelque chose qui fasse l'affaire. Quelque chose de *raisonnable*, cette fois. Trois quatre pages pas plus, mais bien senties, pour présenter cet énorme "pavé" de plus de mille pages. Quelque chose qui "accroche" le lecteur blasé, qui lui fasse entrevoir que dans ces peu rassurantes "plus de mille pages", il pourrait y avoir des choses qui l'intéressent (voir même, qui le concernent, qui sait ?). C'est pas tellement mon style, l'accroche, ça non. Mais là j'allais faire l'exception, pour une fois ! Il fallait bien que "l'éditeur assez fou pour courir l'aventure" (de publier ce monstre, visiblement impubliable) rentre dans ses frais tant bien que mal.

Et puis non, c'est pas venu. J'ai fait de mon mieux pourtant. Et pas qu'un après-midi, comme je comptais le faire, vite fait. Demain ça fera trois semaines pile que je suis dessus, que les feuilles s'entassent. Ce qui est venu, c'est sûr, n'est pas ce qu'on pourrait décemment appeler un "avant-propos". C'est encore loupé, décidément ! On se refait plus à mon âge — et je suis pas fait pour, pour vendre ou faire vendre. Même quand il s'agit de faire plaisir (à soi-même, et aux amis. . .).

Ce qui est venu, c'est une sorte de longue "promenade" commentée, à travers mon œuvre de mathématicien. Une promenade à l'intention surtout du "profane" — de celui qui "n'a jamais rien compris aux maths". Et à mon intention aussi, qui n'avais jamais pris le loisir d'une telle promenade. De fil en aiguille, je me suis vu amené à dégager et à dire des choses qui jusque-là étaient toujours restées dans le non-dit. Comme par hasard, ce sont celles aussi que je sens les plus essentielles, dans mon travail et dans mon œuvre. C'est des choses qui n'ont rien de technique. A toi de voir si j'ai réussi dans ma naïve entreprise de les "faire passer" — une entreprise un peu folle sûrement, elle aussi. Ma satisfaction et mon plaisir, ce serait d'avoir su te les faire sentir. Des choses que beaucoup parmi mes savants collègues ne savent plus sentir. Peut-être sont-ils devenus trop savants et trop prestigieux. Ça fait perdre contact, souvent, avec les choses simples et essentielles.

Au cours de cette "promenade à travers une œuvre", je parle un peu de ma vie aussi. Et un petit peu, ici et là, de quoi il est question dans Récoltes et Semailles. J'en reparle encore et de façon plus détaillée, dans la "Lettre" (datée de Mai l'an dernier) qui suit la "Promenade". Cette A 2
Lettre était destinée à mes ex-élèves et à mes "amis d'antan" dans le monde mathématique. Mais elle non plus n'a rien de technique. Elle peut être lue sans problème par tout lecteur qui serait intéressé à apprendre, par un récit "sur le vif", les tenants et aboutissants qui m'ont finalement amené à écrire Récoltes et Semailles. Plus encore que la Promenade, ça te donnera aussi un avant-goût d'une certaine ambiance, dans le "grand monde" mathématique. Et aussi (tout comme la Promenade), de mon style d'expression, un peu spécial paraît-il. Et de l'esprit aussi qui s'exprime par ce style — un esprit qui lui non plus n'est pas apprécié par tout le monde.

Dans la Promenade et un peu partout dans Récoltes et Semailles, je parle du *travail mathématique.* C'est un travail que je connais bien et de première main. La plupart des choses que j'en dis sont vraies, sûrement, pour tout travail créateur, tout travail de découverte. C'est vrai tout au moins pour le travail dit "intellectuel", celui qui se fait surtout "par la tête", et en écrivant. Un tel travail est marqué par l'éclosion et par l'épanouissement d'une *compréhension* des choses que nous sommes en train de sonder. Mais, pour prendre un exemple au bout opposé, la passion d'amour est, elle aussi, pulsion de découverte. Elle nous ouvre à une connaissance dite "charnelle", qui elle aussi se renouvelle, s'épanouit, s'approfondit. Ces deux pulsions — celle qui anime le mathématicien au travail, disons, et celle en l'amante ou en l'amant — sont bien plus proches qu'on ne le soupçonne généralement, ou qu'on n'est disposé à se l'admettre. Je souhaite que les pages de Récoltes et Semailles puissent contribuer à te le faire sentir, dans ton travail et dans ta vie de tous les jours.

Au cours de la Promenade, il sera surtout question du travail mathématique lui-même. J'y reste quasiment muet par contre sur le *contexte* où ce travail se place, et sur les *motivations* qui jouent en dehors du temps de travail proprement dit. Cela risque de donner de ma personne, ou du mathématicien ou du "scientifique" en général, une image flatteuse certes, mais déformée. Genre "grande et noble passion", sans correctif d'aucune sorte. Dans la ligne, en somme, du grand

"Mythe de la Science" (avec *S* majuscule s'il vous plaît !). Le mythe héroïque, "prométhéen", dans lequel écrivains et savants sont tombés (et continuent à tomber) à qui mieux mieux. Il n'y a guère que les historiens, peut-être, qui y résistent parfois, à ce mythe si séduisant. La vérité, c'est que dans les motivations "du scientifique", qui parfois le poussent à investir sans compter dans son travail, l'ambition et la vanité jouent un rôle aussi important et quasiment universel, que
A 3 dans toute autre profession. Ça prend des formes plus ou moins grossières, plus ou moins subtiles, suivant l'intéressé. Je ne prétends nullement y faire exception. La lecture de mon témoignage ne laissera, j'espère, aucun doute à ce sujet.

Il est vrai aussi que l'ambition la plus dévorante est impuissante à découvrir le moindre énoncé mathématique, ou à le démontrer — tout comme elle est impuissante (par exemple) à "faire bander" (au sens propre du terme). Qu'on soit femme ou homme, ce qui "fait bander" n'est nullement l'ambition, le désir de briller, d'exhiber une puissance, sexuelle en l'occurence — bien au contraire ! Mais c'est la perception aiguë de quelque chose de fort, de très réel et de très délicat à la fois. On peut l'appeler "la beauté", et c'est là un des mille visages de cette chose-là. D'être ambitieux n'empêche pas forcément de sentir parfois la beauté d'un être, ou d'une chose, d'accord. Mais ce qui est sûr, c'est que ce n'est *pas* l'ambition qui nous la fait sentir...

L'homme qui, le premier, a découvert et maîtrisé le feu, était quelqu'un exactement comme toi et moi. Pas du tout ce qu'on se figure sous le nom de "héros", de "demi-dieu" et j'en passe. Sûrement, comme toi et comme moi, il a connu la morsure de l'angoisse, et la pommade vaniteuse éprouvée, qui fait oublier la morsure. Mais au moment où il a "connu" le feu, il n'y avait ni peur, ni vanité. Telle est la vérité dans le mythe héroïque. Le mythe devient insipide, il devient pommade, quand il nous sert à nous cacher un *autre* aspect des choses, tout aussi réel et tout aussi essentiel.

Mon propos dans Récoltes et Semailles a été de parler de l'un et de l'autre aspect — de la pulsion de connaissance, et de la peur et de ses antidotes vaniteux. Je crois "comprendre", ou du moins *connaître* la pulsion et sa nature. (Peut-être un jour découvrirai-je, émerveillé, à quel point je me faisais illusion...) Mais pour ce qui est de la peur et de la vanité, et les insidieux blocages de la créativité qui en dérivent, je sais bien que je n'ai pas été au fond de cette grande énigme. Et j'ignore si je verrai jamais le fond de ce mystère, pendant les années qui me restent à vivre...

En cours d'écriture de Récoltes et Semailles deux images ont émergé, pour représenter l'un et l'autre de ces deux aspects de l'aventure humaine. Ce sont l'*enfant* (alias l'*ouvrier*), et le *Patron.* Dans la Promenade qu'on va faire tantôt, c'est de "l'enfant" qu'il sera question presque exclusivement. C'est lui aussi qui figure dans le sous-titre *"L'enfant et la Mère"*. Ce nom va s'éclairer, j'espère, au cours de la promenade.

A 4 Dans tout le reste de la réflexion, c'est le Patron par contre qui prend surtout le devant de la scène. Il n'est pas patron pour rien ! Il serait d'ailleurs plus exact de dire qu'il a'agit non pas *d'un* Patron, mais *des* Patrons d'entreprises concurrentes. Mais il est vrai aussi que tous les Patrons se ressemblent sur l'essentiel. Et quand on commence à parler des Patrons, ça signifie aussi qu'il va y avoir des "vilains". Dans la partie I de la réflexion ("Fatuité et Renouvellement", qui fait suite à la présente partie introductive, ou le "Prélude en quatre Mouvements"), c'est surtout moi, "le vilain". Dans les trois parties suivantes, c'est surtout "les autres". Chacun son tour !

C'est dire qu'il y aura, en plus de profondes réflexions philosophiques et de "confessions" (nullement contrites), des "portraits au vitriol" (pour reprendre l'expression d'un de mes collègues et amis, qui s'est trouvé un peu malmené...). Sans compter des "opérations" de grande envergure et pas piquées de vers. Robert Jaulin[1](*) m'a assuré (en blaguant à demi) que dans Récoltes et Semailles je faisais "l'ethnologie du milieu mathématique" (ou peut-être la sociologie, je ne saurais plus trop dire). On est flatté bien sûr, quand on apprend que (sans même le savoir) on fait des choses savantes ! C'est un fait qu'au cours de la partie "enquête" de la réflexion (et à mon corps défendant...), j'ai vu défiler, dans les pages que j'étais en train d'écrire, une bonne partie de l'establishment mathématique, sans compter nombre de collègues et d'amis au statut plus modeste. Et ces derniers mois, depuis que j'ai fait les envois du tirage provisoire de Récoltes et Semailles au mois d'octobre dernier, ça a "remis ça" encore. Décidément, mon témoignage est

[1](*) Robert Jaulin est un ami de vieille date. J'ai crû comprendre que vis-à-vis de l'establishment du milieu ethnologique, il se trouve dans une situation (de "loup blanc") un peu analogue à la mienne vis-à-vis du "beau monde" mathématique.

venu comme un pavé dans la mare. Il y a eu des échos un peu sur tous les tons vraiment (sauf celui de l'ennui...). Presque à chaque coup, c'était pas du tout ce à quoi je me serais attendu. Et il y a eu aussi beaucoup de silence, qui en dit long. Visiblement, j'en avais (et il me reste) à en apprendre encore, et de toutes les couleurs, sur ce qui se passe dans la caboche des uns et des autres, parmi mes ex-élèves et autres collègues plus ou moins bien situés — pardon, sur la "sociologie du milieu mathématique" je voulaire dire ! A tous ceux venus d'ores et déjà apporter leur contribution à la grande œuvre sociologique de mes vieux jours, je tiens à exprimer ici-même mes sentiments reconnaissants.

Bien sûr, j'ai été particulièrement sensible aux échos dans les tonalités chaleureuses. Il y a eu aussi quelques rares collègues qui m'ont fait part d'une émotion, ou d'un sentiment (resté inexprimé jusqu'alors) de crise, ou de dégradation à l'intérieur de ce milieu mathématique dont ils A 5
se sentent faire partie.

En dehors de ce milieu, parmi les tout premiers à faire un accueil chaleureux, voire ému, à mon témoignage, je voudrais nommer ici Sylvie et Catherine Chevalley[2](*), Robert Jaulin, Stéphane Deligeorge, Christian Bourgois. Si Récoltes et Semailles va connaître une diffusion plus étendue que celle du tirage provisoire initial (à l'intention d'un cercle des plus restreints), c'est surtout grâce à eux. Grâce, surtout à leur conviction communicative : que ce que je me suis efforcé de saisir et de dire, devait être dit. Et que cela pouvait être entendu dans un cercle plus large que celui de mes collègues (souvent maussades, voire hargneux, et nullement disposés à se remettre en cause...). C'est ainsi que Christian Bourgois n'a pas hésité à courir le risque de publier l'inpubliable, et Stéphane Deligeorge, de me faire l'honneur d'accueillir mon indigeste témoignage dans la collection "Epistémè", aux côtés (pour le moment) de Newton, de Cuvier et d'Arago. (Je ne pouvais rêver meilleure compagnie !) A chacune et à chacun, pour leurs marques répétées de sympathie et de confiance, survenant à un moment particulièrement "sensible", je suis heureux de dire ici toute ma reconnaissance.

Et nous voilà sur le départ d'une Promenade à travers une œuvre, comme entrée en matière pour un voyage à travers une vie. Un long voyage oui, de mille pages et plus, et bien tassée chacune. J'ai mis une vie à le faire, ce voyage, sans l'avoir épuisé, et plus d'une année à le redécouvrir, page après page. Les mots parfois ont été hésitants à venir, pour exprimer tout le jus d'une expérience se dérobant encore à une compréhension hésitante — comme du raisin mûr et dru entassé dans le pressoir semble, par moments, vouloir se dérober à la force qui l'étreint... Mais même en les moments où les mots semblent se bousculer et couler à flots, ce n'est pas au bonheur-la-chance pourtant qu'ils se bousculent et qu'ils coulent. Chacun d'eux a été pesé au passage, ou sinon après-coup, pour être ajusté avec soin s'il a été trouvé trop léger, ou trop lourd. Aussi cette réflexion-témoignage-voyage n'est pas faite pour être lue vite fait, en un jour ou en un mois, par un lecteur qui aurait hâte d'en venir au mot de la fin. Il n'y a *pas* de "mot de la fin", pas de A 6
"conclusions" dans Récoltes et Semailles, pas plus qu'il n'y en a dans ma vie, ou dans la tienne. Il y a un vin, vieilli pendant une vie dans les fûts de mon être. Le dernier verre que tu boiras ne sera pas meilleur que le premier ou que le centième. Ils sont tous "le même", et ils sont tous différents. Et si le premier verre est gâté, tout le tonneau l'est ; autant alors boire de la bonne eau (s'il s'en trouve), plutôt que du mauvais vin.

Mais un bon vin ne se boit pas à la va-vite, ni au pied levé.

[2](*) Sylvie et Catherine Chevalley sont la veuve et la fille de Claude Chevalley, le collègue et ami à qui est dédié la partie centrale de Récoltes et Semailles (ReS III, "La Clef du Yin et du Yang"). En plusieurs endroits de la réflexion, je parle de lui, et du rôle qui fût le sien dans mon itinéraire.

Promenade à travers une œuvre P 1

ou

L'enfant et la Mère

Janvier 1986

1. Quand j'étais gosse, j'aimais bien aller à l'école. On avait le même maître pour nous enseigner *1*
à lire et à écrire, le calcul, le chant (il jouait d'un petit violon pour nous accompagner), ou les hommes préhistoriques et la découverte du feu. Je ne me rappelle pas qu'on se soit jamais ennuyé à l'école, à ce moment. Il y avait la magie des nombres, et celle des mots, des signes et des sons. Celle de la *rime* aussi, dans les chansons ou dans les petits poèmes. Il semblait y avoir dans la rime un mystère au delà des mots. Il en a été ainsi, jusqu'au jour où quelqu'un m'a expliqué qu'il y avait un "truc" tout simple ; que la rime, c'est tout simplement quand on fait se terminer par la même syllabe deux mouvements parlés consécutifs, qui du coup, comme par enchantement, deviennent des *vers*. C'était une révélation ! A la maison, où je trouvais du répondant autour de moi, pendant des semaines et des mois, je m'amusais à faire des vers. A un moment, je ne parlais plus qu'en rimes. Ça m'a passé, heureusement. Mais même aujourd'hui à l'occasion, il m'arrive encore de faire des poèmes — mais sans plus guère aller chercher la rime, si elle ne vient d'elle-même.

A un autre moment un copain plus âgé, qui allait déjà au lycée, m'a appris les nombres négatifs. C'était un autre jeu bien amusant, mais plus vite épuisé. Et il y avait les mots croisés — je passais des jours et des semaines à en fabriquer, de plus en plus imbriqués. Dans ce jeu se combinait la magie de la forme, et celle des signes et des mots. Mais cette passion-là m'a quitté, sans apparemment laisser de traces.

Au lycée, en Allemagne d'abord la première année, puis en France, j'étais bon élève, sans être pour autant "l'élève brillant". Je m'investissais sans compter dans ce qui m'intéressait le plus, et avait tendance à négliger ce qui m'intéressait moins, sans trop me soucier de l'appréciation du "prof" concerné. La première année de lycée en France, en 1940, j'étais interné avec ma mère au camp de concentration, à Rieucros près de Mende. C'était la guerre, et on était des étrangers — des "indésirables" , comme on disait. Mais l'administration du camp fermait un œil pour les gosses du camp, tout indésirables qu'il soient. On entrait et sortait un peu comme on voulait. J'étais le plus âgé, et le seul à aller au lycée, à quatre ou cinq kilomètres de là, qu'il neige ou qu'il vente, avec des chaussures de fortune qui toujours prenaient l'eau. P 2

Je me rappelle encore la première "composition de maths", où le prof m'a collé une mauvaise note, pour la démonstration d'un des "trois cas d'égalité des triangles". Ma démonstration n'était pas celle du bouquin, qu'il suivait religieusement. Pourtant, je savais pertinemment que ma démonstration n'était ni plus ni moins convainquante que celle qui était dans le livre et dont je suivais l'esprit, à coups des sempiternels "on fait glisser telle figure de telle façon sur telle autre" traditionnels. Visiblement, cet homme qui m'enseignait ne se sentait pas capable de juger par ses propres lumières (ici, la validité d'un raisonnement). Il fallait qu'il se reporte à une autorité, celle d'un livre en l'occurence. Ça devait m'avoir frappé, ces dispositions, pour que je me sois rappelé de ce petit incident. Par la suite et jusqu'à aujourd'hui encore, j'ai eu ample occasion pourtant de voir que de telles dispositions ne sont nullement l'exception, mais la règle quasi universelle. Il y aurait beaucoup à dire à ce sujet — un sujet que j'effleure plus d'une fois sous une forme ou sous une autre, dans Récoltes et Semailles. Mais aujourd'hui encore, que je le veuille ou non, je me sens décontenancé, chaque fois que je m'y trouve à nouveau confronté. . .

Les dernières années de la guerre, alors que ma mère restait internée au camp, j'étais dans une maison d'enfants du "Secours Suisse", pour enfants réfugiés, au Chambon sur Lignon. On était juifs la plupart, et quand on était averti (par la police locale) qu'il y aurait des rafles de la Gestapo, on allait se cacher dans les bois pour une nuit ou deux, par petits groupes de deux ou trois, sans trop nous rendre compte qu'il y allait bel et bien de notre peau. La région était bourrée de juifs cachés en pays cévenol, et beaucoup ont survécu grâce à la solidarité de la population locale.

Ce qui me frappait surtout au "Collège Cévenol" (où j'étais élève), c'était à quel point mes camarades s'intéressaient peu à ce qu'ils y apprenaient. Quant à moi, je dévorais les livres de classe en début d'année scolaire, pensant que cette fois, on allait enfin apprendre des choses *vraiment* intéressantes ; et le reste de l'année j'employais mon temps du mieux que je pouvais, pendant que le programme prévu était débité inexorablement, à longueur de trimestres. On avait pourtant des profs sympa comme tout. Le prof d'histoire naturelle, Monsieur Friedel, était d'une qualité humaine et intellectuelle remarquable. Mais, incapable de "sévir", il se faisait chahuter à mort, au point que vers la fin de l'année, il devenait impossible de suivre encore, sa voix impuissante couverte par le tohu-bohu général. C'est pour ça, si ça se trouve, que je ne suis pas devenu biologiste !

P 3 Je passais pas mal de mon temps, même pendant les leçons (chut...), à faire des problèmes de maths. Bientôt ceux qui se trouvaient dans le livre ne me suffisaient plus. Peut-être parce qu'ils avaient tendance, à force, à ressembler un peu trop les uns aux autres ; mais surtout, je crois, parce qu'ils tombaient un peu trop du ciel, comme ça à la queue-leue-leue, sans dire d'où ils venaient ni où ils allaient. C'étaient les problèmes du livre, et pas *mes* problèmes. Pourtant, les questions vraiment naturelles ne manquaient pas. Ainsi, quand les longueurs a, b, c des trois cotés d'un triangle sont connues, ce triangle est connu (abstraction faite de sa position), donc il doit y avoir une "formule" explicite pour exprimer, par exemple, l'aire du triangle comme fonction de a, b, c. Pareil pour un tétraèdre dont on connaît la longueur des six arêtes — quel est le volume ? Ce coup-là je crois que j'ai dû peiner, mais j'ai dû finir par y arriver, à force. De toutes façons, quand une chose me "tenait", je ne comptais pas les heures ni les jours que j'y passais, quitte à oublier tout le reste ! (Et il en est ainsi encore maintenant...)

Ce qui me satisfaisait le moins, dans nos livres de maths, c'était l'absence de toute définition sérieuse de la notion de longueur (d'une courbe), d'aire (d'une surface), de volume (d'un solide). Je me suis promis de combler cette lacune, dès que j'en aurais le loisir. J'y ai passé le plus clair de mon énergie entre 1945 et 1948, alors que j'étais étudiant à l'Université de Montpellier. Les cours à la Fac n'étaient pas faits pour me satisfaire. Sans me l'être jamais dit en clair, je devais avoir l'impression que les profs se bornaient à répéter leurs livres, tout comme mon premier prof de maths au lycée de Mende. Aussi je ne mettais les pieds à la Fac que de loin en loin, pour me tenir au courant du sempiternel "programme". Les livres y suffisaient bien, audit programme, mais il était bien clair aussi qu'ils ne répondaient nullement aux questions que je me posais. A vrai dire, ils ne les *voyaient* même pas, pas plus que mes livres de lycée ne les voyaient. Du moment qu'ils donnaient des recettes de calcul à tout venant, pour des longueurs, des aires et des volumes, à coups d'intégrales simples, doubles, triples (les dimensions supérieures à trois restant prudemment éludées...), la question d'en donner une définition intrinsèque ne semblait pas se poser, pas plus pour mes professeurs que pour les auteurs des manuels.

D'après l'expérience limitée qui était mienne alors, il pouvait bien sembler que j'étais le seul être au monde doué d'une curiosité pour les questions mathématiques. Telle était en tous cas ma conviction inexprimée, pendant ces années passées dans une solitude intellectuelle complète, et qui
P 4 ne me pesait pas[3](*). A vrai dire, je crois que je n'ai jamais songé, pendant ce temps, à approfondir la question si oui ou non j'étais bien la seule personne au monde susceptible de s'intéresser à ce que je faisais. Mon énergie était suffisamment absorbée à tenir la gageure que je m'étais proposé : développer une théorie qui me satisfasse pleinement.

Il n'y avait aucun doute en moi que je ne pourrai manquer d'y arriver, de trouver le fin mot des choses, pour peu seulement que je me donne la peine de les scruter, en mettant noir sur blanc ce qu'elles me disaient, au fur et à mesure. L'intuition du *volume*, disons, était irrécusable. Elle ne pouvait qu'être le reflet d'une *réalité*, élusive pour le moment, mais parfaitement fiable. C'est cette réalité qu'il s'agissait de saisir, tout simplement — un peu, peut-être, comme cette réalité magique de "la rime" avait été saisie, "comprise" un jour.

[3](*) Entre 1945 et 1948, je vivais avec ma mère dans un petit hameau à une dizaine de kilomètres de Montpellier, Mairargues (par Vendargues), perdu au milieu des vignes. (Mon père avait disparu à Auschwitz, en 1942.) On vivait chichement sur ma maigre bourse d'étudiant. Pour arriver à joindre les deux bouts, je faisais les vendanges chaque année, et après les vendanges, du vin de grapiliage, que j'arrivais à écouler tant bien que mal (en contravention, paraît-il, de la législation en vigueur...) De plus il y avait un jardin qui, sans avoir à le travailler jamais, nous fournissait en abondance figues, épinards et même (vers la fin) des tomates, plantées par un voisin complaisant au beau milieu d'une mer de splendides pavots. C'était la belle vie — mais parfois juste aux entournures, quand il s'agissait de remplacer une monture de lunettes, ou une paire de souliers usés jusqu'à la corde. Heureusement que pour ma mère, affaiblie et malade à la suite de son long séjour dans les camps, on avait droit à l'assistance médicale gratuite. Jamais on ne serait arrivés à payer un médecin...

En m'y mettant, à l'âge de dix-sept ans et frais émoulu du lycée, je croyais que ce serait l'affaire de quelques semaines. Je suis resté dessus pendant trois ans. J'ai trouvé même moyen, à force, de louper un examen, en fin de deuxième année de Fac — celui de trigonométrie sphérique (dans l'option "astronomie approfondie", sic), à cause d'une erreur idiote de calcul numérique. (Je n'ai jamais été bien fort en calcul, il faut dire, une fois sorti du lycée...) C'est pour ça que j'ai dû rester encore une troisième année à Montpellier pour y terminer ma licence, au lieu d'aller à Paris tout de suite — le seul endroit, m'assurait-on, où j'aurais l'occasion de rencontrer les gens au courant de ce qui était considéré comme important, en maths. Mon informateur, Monsieur Soula, m'assurait aussi que les derniers problèmes qui s'étaient encore posés en maths avaient été résolus, il y avait vingt ou trente ans, par un dénommé Lebesgue. Il aurait développé justement (drôle de coïncidence, décidément !) une théorie de la mesure et de l'intégration, laquelle mettait un point final à la mathématique.

Monsieur Soula, mon prof de "calcul diff", était un homme bienveillant et bien disposé à mon égard. Je ne crois pas qu'il m'ait convaincu pour autant. Il devait déjà y avoir en moi la prescience P 5
que la mathématique est une chose illimitée en étendue et en profondeur. La mer a-t-elle un "point final" ? Toujours est-il qu'à aucun moment je n'ai été effleuré par la pensée d'aller dénicher le livre de ce Lebesgue dont Monsieur Soula m'avait parlé, et qu'il n'a pas dû non plus jamais tenir entre les mains. Dana mon esprit, il n'y avait rien de commun entre ce que pouvait contenir un livre, et le travail que *je* faisais, à *ma* façon, pour satisfaire ma curiosité sur telles choses qui m'avaient intrigué.

2. Quand j'ai finalement pris contact avec le monde mathématique à Paris, un ou deux ans *2*
plus tard, j'ai fini par y apprendre, entre beaucoup d'autres choses, que le travail que j'avais fait dans mon coin avec les moyens du bord, était (à peu de choses près) ce qui était bien connu de "tout le monde", sous le nom de "théorie de la mesure et de l'intégrale de Lebesgue". Aux yeux des deux ou trois aînés à qui j'ai parlé de ce travail (voire même, montré un manuscrit), c'était un peu comme si j'avais simplement perdu mon temps, à refaire du "déjà connu". Je ne me rappelle pas avoir été déçu, d'ailleurs. A se moment-là, l'idée de recueillir un "crédit", ou ne serait-ce qu'une approbation ou simplement l'intérêt d'autrui, pour le travail que je faisais, devait être encore étrangère à mon esprit. Sans compter que mon énergie était bien assez accaparée à me familiariser avec un milieu complètement différent, et surtout, à apprendre ce qui était considéré à Paris comme le B.A.BA du mathématicien[4](*).

Pourtant, en repensant maintenant à ces trois années, je me rends compte qu'elles n'étaient nullement gaspillées. Sans même le savoir, j'ai appris alors dans la solitude ce qui fait l'essentiel du métier de mathématicien — ce qu'aucun maître ne peut véritablement enseigner. Sans avoir eu jamais à me le dire, sans avoir eu à rencontrer quelqu'un avec qui partager ma soif de comprendre, je savais pourtant, "par mes tripes" je dirais, que j'étais mathématicien : quelqu'un qui "fait" des maths, au plein sens du terme — comme on "fait" l'amour. La mathématique était devenue pour moi une maîtresse toujours accueillante à mon désir. Ces années de solitude ont posé le fondement d'une confiance qui n'a jamais été ébranlée — ni par la découverte (débarquant à Paris à l'âge de vingt ans) de toute l'étendue de mon ignorance et de l'immensité de ce qu'il me fallait apprencire ; ni (plus de vingt ans plus tard) par les épisodes mouvementés de mon départ sans retour du monde mathématique ; ni, en ces dernières années, par les épisodes souvent assez dingues d'un certain "Enterrement" (anticipé et sans bavures) de ma personne et de mon œuvre, orchestré par mes P 6
plus proches compagnons d'antan...

Pour le dire autrement : j'ai appris, en ces années cruciales, à *être seul*[5](*). J'entends par là : aborder par mes propres lumières les choses que je veux connaître, plutôt que de me fier aux idées et aux consensus, exprimés ou tacites, qui me viendraient d'un groupe plus ou moins étendu

[4](*) Je fais un court récit de cette époque de transition un peu rude, dans la première partie de Récoltes et Semailles (ReS I), dans la section "L'étranger bienvenu" (n° 9).

[5](*) Cette formulation est quelque peu impropre. Je n'ai jamais eu à "apprendre à être seul", pour la simple raison que je n'ai jamais *désappris*, au cours de mon enfance, cette capacité innée qui était en moi à ma naissance, comme elle est en chacun. Mais ces trois ans de travail solitaire, où j'ai pu donner ma mesure a moi-même, suivant les critères d'exigence spontanée qui étaient les miens, ont confirmé et reposé en moi, dans ma relation cette fois au travail mathématique, une assise de confiance et de tranquille assurance, qui ne devait rien aux consensus et aux

dont je me sentirais un membre, ou qui pour toute autre raison serait investi pour moi d'autorité. Des consensus muets m'avaient dit, au lycée comme à l'université, qu'il n'y avait pas lieu de se poser de question sur la notion même de "volume", présentée comme "bien connue", "évidente", "sans problème". J'avais passé outre, comme chose allant de soi — tout comme Lebesgue, quelques décennies plus tôt, avait dû passer outre. C'est dans cet acte de *"passer outre"*, d'être soi-même en somme et non pas simplement l'expression des consensus qui font loi, de ne pas rester enfermé à l'intérieur du cercle impératif qu'ils nous fixent — c'est avant tout dans cet acte solitaire que se trouve *"la création"*. Tout le reste vient par surcroit.

Par la suite, j'ai eu l'occasion, dans ce monde des mathématiciens qui m'accueillait, de rencontrer bien des gens, aussi bien des aînés que des jeunes gens plus ou moins de mon âge, qui visiblement étaient beaucoup plus brillants, beaucoup plus "doués" que moi. Je les admirais pour la facilité avec laquelle ils apprenaient, comme en se jouant, des notions nouvelles, et jonglaient avec comme s'ils les connaissaient depuis leur berceau — alors que je me sentais lourd et pataud, me frayant un chemin péniblement, comme une taupe, à travers une montagne informe de choses qu'il était important (m'assurait-on) que j'apprenne, et dont je me sentais incapable de saisir les tenants et les aboutissants. En fait, je n'avais rien de l'étudiant brillant, passant haut la main les concours prestigieux, assimilant en un tournemain des programmes prohibitifs.

La plupart de mes camarades plus brillants sont d'ailleurs devenus des mathématiciens compétents et réputés. Pourtant, avec le recul de trente ou trente-cinq ans, je vois qu'ils n'ont pas laissé
P 7 sur la mathématique de notre temps une empreinte vraiment profonde. Ils ont fait des choses, des belles choses parfois, dans un contexte déjà tout fait, auquel ils n'auraient pas songé à toucher. Ils sont restés prisonniers sans le savoir de ces cercles invisibles et impérieux, qui délimitent un Univers dans un milieu et à une époque donnée. Pour les franchir, il aurait fallu qu'ils retrouvent en eux cette capacité qui était leur à leur naissance, tout comme elle était mienne : la capacité d'être seul.

Le petit enfant, lui, n'a aucune difficulté à être seul. Il est solitaire par nature, même si la compagnie occasionnelle ne lui déplaît pas et qu'il sait réclamer la totosse de maman, quand c'est l'heure de boire. Et il sait bien, sans avoir eu à se le dire, que la totosse est pour lui, et qu'il *sait* boire. Mais souvent, nous avons perdu le contact avec cet enfant en nous. Et constamment nous passons à côté du meilleur, sans daigner le voir...

Si dans Récoltes et Semailles je m'adresse à quelqu'un d'autre encore qu'à moi-même, ce n'est pas à un "public". Je m'y adresse à toi qui me lis comme à une *personne*, et à une personne *seule*. C'est à celui en toi qui sait être seul, à l'enfant, que je voudrais parler, et à personne d'autre. Il est loin souvent l'enfant, je le sais bien. Il en a vu de toutes les couleurs et depuis belle lurette. Il s'est planqué Dieu sait où, et c'est pas facile, souvent, d'arriver jusqu'à lui. On jurerait qu'il est mort depuis toujours, qu'il n'a jamais existé plutôt — et pourtant, je suis sûr qu'il est là quelque part, et bien en vie.

Et je sais aussi quel est le *signe* que je suis entendu. C'est quand, au delà de toutes les différences de culture et de destin, ce que je dis de ma personne et de ma vie trouve en toi écho et résonance; quand tu y retrouves aussi *ta propre vie*, ta propre expérience de toi-même, sous un jour peut-être auquel tu n'avais pas accordé attention jusque-là. Il ne s'agit pas d'une "identification", à quelque chose ou à quelqu'un d'éloigné de toi. Mais peut-être, un peu, que tu redécouvres ta propre vie, ce qui est le plus *proche* de toi, à travers la redécouverte que je fais de la mienne, au fil des pages dans Récoltes et Semailles et jusque dans ces pages que je suis en train d'écrire aujourd'hui même.

3 **3**. Avant toute chose, Récoltes et Semailles est une *réflexion* sur moi-même et sur ma vie. Par là-même, c'est aussi un *témoignage*, et ceci de deux façons. C'est un témoignage sur mon *passé*, sur lequel porte le poids principal de la réflexion. Mais en même temps c'est aussi un témoignage
P 8 sur le *présent* le plus immédiat — sur le moment même où j'écris, et où naissent les pages de Récoltes et Semailles au fil des heures, des nuits et des jours. Ces pages sont les fidèles témoins d'une longue méditation sur ma vie, telle qu'elle s'est poursuivie réellement (et se poursuit encore en ce moment même...).

---

modes qui font loi. J'ai occasion d'y faire allusion à nouveau dans la note "Racines et solitude" (ReS IV, n° 171_3, notamment p. 1080).

Ces pages n'ont pas de prétention littéraire. Elles constituent un *document* sur moi-même. Je ne me suis permis d'y toucher (pour des retouches stylistiques occasionnelles, notamment) qu'à l'intérieur de limites très étroites[6](*). S'il a une prétention, c'est celle seulement d'être vrai. Et c'est beaucoup.

Ce document, par ailleurs, n'a rien d'une "autobiographie". Tu n'y apprendras ni ma date de naissance (qui n'aurait guère d'intérêt que pour dresser une carte astrologique), ni les noms de ma mère et de mon père ou ce qu'ils faisaient dans la vie, ni les noms de celle qui fut mon épouse et d'autres femmes qui ont été importantes dans ma vie, ou ceux des enfants qui sont nés de ces amours, et ce que les uns et les autres ont fait de leur vie. Ce n'est pas que ces choses n'aient été importantes dans ma vie, et ne gardent une importance encore maintenant. Mais telle que cette réflexion sur moi-même s'est engagée et poursuivie, à aucun moment je ne me suis senti incité à m'engager tant soit peu dans une description de ces choses que je frôle ici et là, et encore mois, à aligner consciencieusement des noms et des chiffres. A aucun moment, il ne m'aurait semblé que cela pouvait ajouter quoi que ce soit au propos que je poursuivais en ce moment-là. (Alors que dans les quelques pages qui précèdent, j'ai été amené, comme malgré moi, à inclure peut-être plus de détails matériels sur ma vie que dans les mille pages qui vont suivre...)

Et si tu me demandes quel est donc ce "propos" que je poursuis à longueur de mille pages, je répondrai : c'est de faire le récit, et par là-même la *découverte*, de *l'aventure intérieure* qu'a été et qu'est ma vie. Ce récit-témoignage d'une aventure se poursuit en même temps sur les deux niveaux dont je viens de parler. Il y a l'exploration d'une aventure dans le passé, de ses racines et de son origine jusque dans mon enfance. Et il y a la continuation et le renouvellement de cette "même" aventure, au fil des instants et des jours alors que j'écris Récoltes et Semailles, en réponse spontanée à une interpellation violente me venant du monde extérieur[7](**).

Les faits extérieurs viennent alimenter la réflexion, dans la mesure seulement où ils suscitent P 9
et provoquent un rebondissement de l'aventure intérieure, ou contribuent à l'éclairer. Et l'enterrement et le pillage de mon œuvre mathématique, dont il sera longuement question, a été une telle provocation. Elle a suscité en moi la levée en masse de réactions égotiques puissantes, et en même temps m'a révélé les liens profonds et ignorés qui continuent à me relier à l'œuvre issue de moi.

Il est vrai que le fait que je fasse partie des "forts en maths" n'est pas forcément une raison (et encore moins une bonne raison) pour t'intéresser à mon "aventure" particulière — ni le fait que j'aie eu des ennuis avec mes collègues, après avoir changé de milieu et de style de vie. Il ne manque d'ailleurs pas de collègue ni même d'amis, qui trouvent du plus grand ridicule d'étaler en public (comme ils disent) ses "états d'âme". Ce qui compte, ce sont les "résultats". L'"âme", elle, c'est-à-dire cela en nous qui *vit* la "production" de ces "résultats", ou aussi ses retombées de toutes sortes (tant dans la vie du "producteur", que dans celle de ses semblables), est objet de mésestime, voire d'une dérision ouvertement affichée. Cette attitude se veut expression d'une "modestie". J'y vois le signe d'une fuite, et un étrange dérèglement, promu par l'air même que nous respirons. Il est sûr que je n'écris pas pour celui frappé par cette sorte de mépris larvé de lui-même, qui lui fait dédaigner ce que j'ai de meilleur à lui offrir. Un mépris pour ce qui véritablement fait *sa propre vie*, et pour ce qui fait la mienne : les mouvements superficiels et profonds, grossiers ou subtils qui animent la psyché, cette *"âme"* justement qui vit l'expérience et qui y réagit, qui se fige ou qui s'épanouit, qui se replie ou qui apprend...

Le récit d'une aventure intérieure ne peut être fait que par celui qui la vit, et par nul autre. Mais alors même que le récit ne serait destiné qu'à soi-même, il est rare qu'il ne glisse dans l'ornière de la construction d'un *mythe*, dont le narrateur serait le héros. Un tel mythe naît, non de l'imagination créatrice d'un peuple et d'une culture, mais de la vanité de celui qui n'ose assumer une humble réalité, et qui se plaît à lui substituer une construction, œuvre de son esprit. Mais un récit *vrai* (s'il s'en trouve), d'une aventure telle qu'elle fut vécue vraiment, est chose de prix. Et ceci, non par un prestige qui (à tort ou à raison) entourerait le narrateur, mais par le seul fait d'*exister*, avec sa qualité de vérité. Un tel témoignage est précieux, qu'il vienne d'un homme de notoriété

[6](*) Ainsi, les rectifications éventuelles d'erreurs (matérielles, ou de perspective, etc) ne sont pas l'occasion de retouches du premier jet, mais se font dans des notes de bas de page, ou lors d'un "retour" ultérieur sur la situation examinée.

[7](**) Pour des précisions au sujet de cette "interpellation violente", voir "Lettre", notamment sections 3 à 8.

voire illustre, ou d'un petit employé sans avenir et chargé de famille, ou d'un criminel de droit commun.

Si un tel récit a une vertu pour autrui, c'est avant tout, de le reconfronter à lui-même, à travers
P 10 ce témoignage sans fard de l'expérience d'un autre. Ou aussi (pour le dire autrement) d'effacer peut-être en lui (et ne serait-ce que l'espace du temps que dure une lecture) ce mépris en lequel il tient sa *propre aventure*, et cette "âme" qui en est le passager et le capitaine...

4 **4**. En parlant de mon passé de mathématicien, et par la suite en découvrant (comme à mon corps défendant) les péripéties et les arcanes du gigantesque Enterrement de mon œuvre, j'ai été amené, sans l'avoir cherché, à faire le tableau d'un certain milieu et d'une certaine époque — d'une époque marquée par la décomposition de certaines des valeurs qui donnaient un sens au travail des hommes. C'est l'aspect "tableau de mœurs", brossé autour d'un "fait divers" sans doute unique dans les annales de "la Science". Ce que j'ai dit précédemment, dit assez clairement, je pense, que tu ne trouveras pas dans Récoltes et Semailles un "dossier" concernant une certaine "affaire" peu ordinaire, histoire de te mettre au courant vite fait. Tel ami pourtant à la recherche du dossier, est passé yeux fermés et sans rien voir, à côté de presque tout ce qui fait la substance et la chair de Récoltes et Semailles.

Comme je l'explique de façon beaucoup plus circonstanciée dans la Lettre, "l'enquête" (ou le "tableau de mœurs") se poursuit surtout au cours des parties II et IV, "L'Enterrement (1) — ou la robe de l'Empereur de Chine" et "L'Enterrement (3) — ou les Quatre Opérations". Au fil des pages, j'y tire au jour obstinément, l'un après l'autre, une multitude de faits juteux (à dire le moins), que j'essaye tant bien que mal de "caser" au fur et à mesure. Petit à petit, ces faits s'assemblent dans un tableau d'ensemble qui progressivement sort des brumes, en des couleurs de plus en plus vives, avec des contours de plus en plus nets. Dans ces notes au jour le jour, les "faits bruts" qui viennent d'apparaître se mélangent inextricablement à des réminiscences personnelles, et à des commentaires et des réflexions de nature psychologique, philosophique, voire même (occasionnellement) mathématique. C'est comme ça et je n'y puis rien !

A partir du travail que j'ai fait, qui m'a tenu en haleine pendant plus d'une année, constituer un dossier, en style "conclusions d'enquête", devrait représenter un travail supplémentaire de l'ordre de quelques heures ou de quelques jours, selon la curiosité et l'exigence du lecteur intéressé. J'ai bien essayé à un moment de le constituer, le fameux dossier. C'était quand j'ai commencé à écrire une note qui devait s'appeler "Les Quatre Opérations"[8](*). Et puis non, il y a rien eu à faire. J'y
P 11 arrivais pas ! Ce n'est pas là mon style d'expression, décidément, et sur mes vieux jours moins que jamais. Et j'estime à présent, avec Récoltes et Semailles, en avoir assez fait pour le bénéfice de la "communauté mathématique", pour laisser sans remords à d'autres que moi (s'il s'en trouve parmi mes collègues qui se sentiraient concernés) le soin de constituer le "dossier" qui s'impose.

5 **5**. Il est temps que je dise quelques mots ici sur mon œuvre mathématique, qui a pris dans ma vie et y garde (à ma propre surprise) une place importante. Plus d'une fois dans Récoltes et Semailles je reviens sur cette œuvre — parfois d'une façon clairement intelligible à chacun, et en d'autres moments en des termes tant soit peu techniques[9](*). Ces derniers passages vont en grande partie passer "par dessus la tête" non seulement du "profane", mais même du collègue mathématicien qui ne serait plus ou moins "dans le coup" des maths dont il y est question. Tu peux bien sûr sauter sans plus les passages qui te paraîtront de nature un peu trop "calée". Comme tu peux aussi les parcourir, et saisir peut-être au passage un reflet de la "mystérieuse beauté" (comme m'écrivait un ami non mathématicien) du monde des choses mathématique, surgissant comme autant d'"étranges îlots inaccessibles" dans les vastes eaux mouvantes de la réflexion...

La plupart des mathématiciens, je l'ai dit tantôt, sont portés à se cantonner dans un cadre conceptuel, dans un *"Univers"* fixé une bonne fois pour toutes — celui, essentiellement, qu'ils ont

[8](*) La note prévue à fini par éclater en la partie IV (de même nom "Les quatre opérations") de Récoltes et Semailles, comprenant dans les 70 notes s'étendant sur bien quatre cent pages.

[9](*) Il y a également ici et là, en plus d'aperçus mathématiques sur mon œuvre passée, des passages contenant aussi des développements mathématiques nouveaux. Le plus long est "Les cinq photos (cristaux et $\mathscr{D}$-Modules)" dans ReS IV, note n° 171 (ix).

trouvé "tout fait" au moment où ils ont fait leurs études. Ils sont comme les héritiers d'une grande et belle maison toute installée, avec ses salles de séjour et ses cuisines et ses ateliers, et sa batterie de cuisine et un outillage à tout venant, avec lequel il y a, ma foi, de quoi cuisiner et bricoler. Comment cette maison s'est construite progressivement, au cours des générations, et comment et pourquoi ont été conçus et façonnés tels outils (et pas d'autres...), pourquoi les pièces sont agencées et aménagées de telle façon ici, et de telle autre là — voilà autant de questions que ces héritiers ne songeraient pas à se demander jamais. C'est ça "l'Univers", le "donné" dans lequel il faut vivre, un point c'est tout ! Quelque chose qui paraît grand (et on est loin, le plus souvent, d'avoir fait le tour de toutes ses pièces), mais *familier* en même temps, et surtout : *immuable.* Quand ils s'affairent, c'est pour entretenir et embellir un patrimoine : réparer un meuble bancal, crépir une façade, affûter un outil, voire même parfois, pour les plus entreprenants, fabriquer à l'atelier, de toutes pièces, un meuble nouveau. Et il arrive, quand ils s'y mettent tout entier, que P 12
le meuble soit de toute beauté, et que la maison toute entière en paraisse embellie.

Plus rarement encore, l'un d'eux songera à apporter quelque modification à un des outils de la réserve, ou même, sous la pression répétée et insistante des besoins, d'en imaginer et d'en fabriquer un nouveau. Ce faisant, c'est tout juste s'il ne se confondra pas en excuses, pour ce qu'il ressent comme une sorte d'enfreinte à la piété due à la tradition familiale, qu'il a l'impression de bousculer par une innovation insolite.

Dans la plupart des pièces de la maison, les fenêtres et les volets sont soigneusement clos — de peur sans doute que ne s'y engouffre un vent qui viendrait d'ailleurs. Et quand les beaux meubles nouveaux, l'un ici et l'autre là, sans compter la progéniture, commencent à encombrer des pièces devenues étroites et à envahir jusqu'aux couloirs, aucun de ces héritiers-là ne voudra se rendre compte que son Univers familier et douillet commence à se faire un peu étroit aux entournures. Plutôt que de se résoudre à un tel constat, les uns et les autres préféreront se faufiler et se coincer tant bien que mal, qui entre un buffet Louis XV et un fauteuil à bascule en rotin, qui entre un marmot morveux et un sarcophage égyptien, et tel autre enfin, en désespoir de cause, escaladera de son mieux un monceau hétéroclite et croulant de chaises et de bancs...

Le petit tableau que je viens de brosser n'est pas spécial au monde des mathématiciens. Il illustre des conditionnements invétérés et immémoriaux, qu'on rencontre dans tous les milieux et dans toutes les sphères de l'activité humaine, et ceci (pour autant que je sache) dans toutes les sociétés et à toutes les époques. J'ai eu occasion déjà d'y faire allusion, et je ne prétends nullement en être exempt moi-même. Comme le montrera mon témoignage, c'est le contraire qui est vrai. Il se trouve seulement qu'au niveau relativement limité d'une activité créatrice intellectuelle, j'ai été assez peu touché[10](*) par ce conditionnement-là, qu'on pourrait appeler la "cécité culturelle" — l'incapacité de voir (et de se mouvoir) en dehors de l'"Univers" fixé par la culture environnante.

Je me sens faire partie, quant à moi, de la lignée des mathématiciens dont la vocation spontanée et la joie est de construire sans cesse des maisons nouvelles[11](**). Chemin faisant, ils ne peuvent s'empêcher d'inventer aussi et de façonner au fur et à mesure tous les outils, ustensiles, meubles et P 13
instruments requis, tant pour construire la maison depuis les fondations jusqu'au faîte, que pour pourvoir en abondance les futures cuisines et les futurs ateliers, et installer la maison pour y vivre et y être à l'aise. Pourtant, une fois tout posé jusqu'au dernier chéneau et au dernier tabouret, c'est rare que l'ouvrier s'attarde longuement dans ces lieux, où chaque pierre et chaque chevron porte la trace de la main qui l'a travaillé et posé. Sa place n'est pas dans la quiétude des univers tout faits, si accueillants et si harmonieux soient-ils — qu'ils aient été agencés par ses propres mains, ou par ceux de ses devanciers. D'autres tâches déjà l'appellent sur de nouveaux chantiers, sous la poussée impérieuse de besoins qu'il est peut-être le seul a sentir clairement, ou (plus souvent encore) en devançant des besoins qu'il est le seul à pressentir. Sa place est au grand air. Il est l'ami du vent et ne craint point d'être seul à la tâche, pendant des mois et des années et, s'il le faut, pendant une vie entière, s'il ne vient à la rescousse une relève bienvenue. Il n'a que deux mains comme tout le monde, c'est sur — mais deux mains qui à chaque moment devinent ce qu'elles ont à faire, qui ne

[10](*) J'en vois la cause principale dans un certain climat propice qui a entouré mon enfance jusqu'à l'âge de cinq ans. Voir à ce sujet la note "L'innocence" (ReS III, n° 107).

[11](**) Cette image archétype de la "maison" à construire, fait surface et se trouve formulée pour la première fois dans la note "Yin le Serviteur, et les nouveaux maîtres" (ReS III, n° 135).

répugnent ni aux plus grosses besognes, ni aux plus délicates, et qui jamais ne se lassent de faire et de refaire connaissance de ces choses innombrables qui les appellent sans cesse à les connaître. Deux mains c'est peu, peut-être, car le Monde est infini. Jamais elles ne l'épuiseront ! Et pourtant, deux mains, c'est beaucoup...

Moi qui ne suis pas fort en histoire, si je devais donner des noms de mathématiciens dans cette lignée-là, il me vient spontanément ceux de Galois et de Riemann (au siècle dernier) et celui de Hilbert (au début du présent siècle). Si j'en cherche un représentant parmi les aînés qui m'ont accueilli à mes débuts dans le monde mathématique[12](*), c'est le nom de Jean Leray qui me vient avant tout autre, alors que mes contacts avec lui sont pourtant restés des plus épisodiques[13](**).

P 14 Je viens là d'esquisser à grands traits deux portraits : celui du mathématicien "casanier" qui se contente d'entretenir et d'embellir un héritage, et celui du bâtisseur-pionnier[14](*), qui ne peut s'empêcher de franchir sans cesse ces "cercles invisibles et impérieux" qui délimitent un Univers[15](**). On peut les appeler aussi, par des noms un peu à l'emporte-pièce mais suggestifs, les "conservateurs" et les "novateurs". L'un et l'autre ont leur raison d'être et leur rôle à jouer, dans une même aventure collective se poursuivant au cours des générations, des siècles et des millénaires. Dans une période d'épanouissement d'une science ou d'un art, il n'y a entre ces deux tempéraments opposition ni antagonisme[16](***). Ils sont différents et ils se complètent mutuellement comme se complètent la pâte et le levain.

Entre ces deux types extrêmes (mais nullement opposés par nature), on trouve bien sûr tout un éventail de tempéraments intermédiaires. Tel "casanier" qui ne songerait à quitter une demeure familière, et encore moins à aller se coltiner le travail d'aller en construire une autre Dieu sait où, n'hésitera pas pourtant, lorsque décidément ça commence à se faire étroit, à mettre la main à la truelle pour aménager une cave ou un grenier, surélever un étage, voire même, au besoin, adjoindre aux murs quelque nouvelle dépendance aux modestes proportions[17](****). Sans être bâtisseur dans l'âme, souvent pourtant il regarde avec un œil de sympathie, ou tout au moins sans inquiétude ni réprobation secrètes, tel autre qui avait partagé avec lui le même logis, et que voilà
P 15 trimer à rassembler poutres et pierres dans quelque cambrousse impossible, avec les airs d'un qui y verrait déjà un palais...

6 **6**. Mais je reviens à ma propre personne et à mon œuvre.

Si j'ai excellé dans l'art du mathématicien, c'est moins par l'habileté et la persévérance à résoudre des problèmes légués par mes devanciers, que par cette propension naturelle en moi qui me pousse à voir des *questions*, visiblement cruciales, que personne n'avait vues, ou à dégager les *"bonnes notions"* qui manquaient (sans que personne souvent ne s'en soit rendu compte, avant

---

[12](*) Je parle de ces débuts dans la section "L'étranger bienvenu" (ReS I, n° 9).

[13](**) Cela n'empêche que j'ai été (à la suite de H. Cartan et J. P. Serre) un des principaux utilisateurs et promoteurs d'une des grandes notions novatrices introduites par Leray, celle de faisceau, laquelle a été un des outils essentiels à travers toute mon œuvre de géomètre. C'est elle aussi qui m'a fourni la clef pour l'élargissement de la notion d'espace (topologique) en celle de topos, dont il sera question plus bas.

Leray diffère d'ailleurs du portrait que j'ai tracé du "bâtisseur", me semble-t-il, en ceci qu'il ne semble pas être porté à "construire des maisons depuis les fondations jusqu'au faîte". Plutôt, il n'a pu s'empêcher d'amorcer des vastes fondations, en des lieux auxquels personne n'aurait songé, tout en laissant à d'autres le soin de les terminer et de bâtir dessus, et, une fois la maison construite, de s'installer dans les lieux (ne fût-ce que pour un temps)...

[14](*) Je viens, subrepticement et "par la bande", d'accoler là deux qualificatifs aux mâles résonances (celui de "bâtisseur" et celui de "pionnier"), lesquels expriment pourtant des aspects bien différents de la pulsion de découverte, et de nature plus délicate qui ces noms ne sauraient l'évoquer. C'est ce qui va apparaître dans la suite de cette promenade-réflexion, dans l'étape "A la découverte de la Mère — ou les deux versants" (n° 17).

[15](**) Du même coup d'ailleurs, et sans l'avoir voulu, il assigne à cet Univers ancien (sinon pour lui-même, du moins pour ses congénères moins mobiles que lui) des limites nouvelles, en de nouveaux cercles plus vastes certes, mais tout aussi invisibles et tout aussi impérieux que le furent ceux qu'ils ont remplacés.

[16](***) Tel a été le cas notamment dans le monde mathématique, pendant la période (1948–1969) dont j'ai été un témoin direct, alors que je faisais moi-même partie de ce monde. Après mon départ en 1970, il semble y avoir eu une sorte de réaction de vaste envergure, une sorte de "consensus de dédain" pour les "idées" en général, et plus particulièrement, pour les grandes idées novatrices que j'avais introduites.

[17](****) La plupart de mes "aînés" (dont il est question p. ex. dans "Une dette bienvenue", Introduction, 10) correspondent à ce tempérament intermédiaire. J'ai pensé notamment à Henri Cartan, Claude Chevalley, André Weil, Jean-Pierre Serre, Laurent Schwartz. Sauf peut-être Weil, ils ont d'ailleurs tous accordé un "œil de sympathie", sans "inquiétude ni réprobation secrètes", aux aventures solitaires dans lesquelles ils me voyaient m'embarquer.

que la notion nouvelle ne soit apparue), ainsi que les *"bons énoncés"* auxquels personne n'avait songé. Bien souvent, notions et énoncés s'agencent de façon si parfaite, qu'il ne peut y avoir aucun doute dans mon esprit qu'ils ne soient corrects (à des retouches près, tout au plus) — et souvent alors, quand il ne s'agit d'un "travail sur pièces" destiné à publication, je me dispense d'aller plus loin, et de prendre le temps de mettre au point une démonstration qui bien souvent, une fois l'énoncé et son contexte bien vus, ne peut plus guère être qu'une question de "métier", pour ne pas dire de routine. Les choses qui sollicitent l'attention sont innombrables, et il est impossible de suivre jusqu'au bout l'appel de chacune ! Cela n'empêche que les propositions et théorèmes démontrés en bonne et due forme, dans mon œuvre écrite et publiée, se chiffrent par milliers, et je crois pouvoir dire qu'à très peu d'exceptions près, ils sont tous entrés dans le patrimoine commun des choses communément admises comme "connues" et couramment utilisées un peu partout en mathématique.

Mais plus encore que vers la découverte de questions, de notions et d'énoncés nouveaux, c'est vers celle de *points de vue* féconds, me conduisant constamment à introduire, et à développer peu ou prou, des *thèmes* entièrement nouveaux, que me porte mon génie particulier. C'est là, il me semble, ce que j'ai apporté de plus essentiel à la mathématique de mon temps. A vrai dire, ces innombrables questions, notions, énoncés dont je viens de parler, ne prennent pour moi un sens qu'à la lumière d'un tel "point de vue" — ou pour mieux dire, ils en *naissent* spontanément, avec la force de l'évidence ; à la même façon qu'une lumière (même diffuse) qui surgit dans la nuit noire, semble faire naître du néant ces contours plus ou moins flous ou nets qu'elle nous révèle soudain. Sans cette lumière qui les unit dans un faisceau commun, les dix ou cent ou mille questions, notions, énoncés apparaîtraient comme un monceau hétéroclite et amorphe de "gadgets mentaux", isolés les uns des autres — et non comme les parties d'un *Tout* qui, pour rester peut-être invisible, se P 16
dérobant encore dans les replis de la nuit, n'en est pas moins clairement pressenti.

Le point de vue fécond est celui qui nous révèle, comme autant de parties vivantes d'un même Tout qui les englobe et leur donne un sens, ces questions brûlantes que nul ne sentait, et (comme en réponse peut-être à ces questions) ces notions tellement naturelles que personne pourtant n'avait songé à dégager, et ces énoncés enfin qui semblent couler de source, et que personne certes ne risquait de poser, aussi longtemps que les questions qui les ont suscités, et les notions qui permettent de les formuler, n'étaient pas apparues encore. Plus encore que ce qu'on appelle les "théorèmes-clef" en mathématique, ce sont les points de vue féconds qui sont, dans notre art[18](*), les plus puissants outils de découverte — ou plutôt, ce ne sont pas des outils, mais ce sont les *yeux* même du chercheur qui, passionnément, veut connaître la nature des choses mathématiques.

Ainsi, le point de vue fécond n'est autre que cet "œil" qui à la fois nous fait *découvrir*, et nous fait *reconaître l'unité* dans la multiplicité de ce qui est découvert. Et cette unité est véritablement la vie même et le souffle qui relie et anime ces choses multiples.

Mais comme son nom même le suggère, un "point de vue" en lui-même reste parcellaire. Il nous révèle *un des aspects* d'un paysage ou d'un panorama, parmi une multiplicité d'autres également valables, également "réels". C'est dans la mesure où se conjuguent les points de vue complémentaires d'une même réalité, où se multiplient nos "yeux", que le regard pénètre plus avant dans la connaissance des choses. Plus la réalité que nous désirons connaître est riche et complexe, et plus aussi il est important de disposer de plusieurs "yeux"[19](**) pour l'appréhender dans toute son ampleur et dans toute sa finesse.

Et il arrive, parfois, qu'un faisceau de points de vue convergents sur un même et vaste paysage, par la vertu de cela en nous apte à saisir l'*Un* à travers le multiple, donne corps à une chose nouvelle ; à une chose qui dépasse chacune des perspectives partielles, de la même façon qu'un être vivant dépasse chacun de ses membres et de ses organes. Cette chose nouvelle, on peut l'appe- P 17
ler une *vision.* La vision unit les points de vue déjà connus qui l'incarnent, et elle nous en révèle d'autres jusque-là ignorés, tout comme le point de vue fécond fait découvrir et appréhender comme

[18](*) Il n'en est sûrement pas ainsi dans "notre art" seulement, mais (il me semble) dans tout travail de découverte, tout au moins quand celui-ci se situe au niveau de la connaissance intellectuelle.

[19](**) Tout point de vue amène à développer un *langage* qui l'exprime et qui lui est propre. Avoir plusieurs "yeux" ou plusieurs "points de vue" pour appréhender une situation, revient aussi (en mathématique tout au moins) à disposer de *plusieurs langages différents* pour la cerner.

partie d'un même Tout, une multiplicité de questions, de notions et d'énoncés nouveaux.

Pour le dire autrement : la vision est aux poins de vue dont elle paraît issue et qu'elle unit, comme la claire et chaude lumière du jour est aux différentes composantes du spectre solaire. Une vision vaste et profonde est comme une *source* inépuisable, faite pour inspirer et pour éclairer le travail non seulement de celui en qui elle est née un jour et qui s'est fait son serviteur, mais celui de générations, fascinés peut-être (comme il le fut lui-même) par ces lointaines limites qu'elle nous fait entrevoir...

7 **7**. La période dite "productive" de mon activité mathématique, c'est-à-dire celle attestée par des publications en bonne et due forme, s'étend entre 1950 et 1969, donc sur vingt ans. Et pendant vingt-cinq ans, entre 1945 (quand j'avais dix-sept ans) et 1969 (quand j'allais sur les quarante-deux), j'ai investi pratiquement la totalité de mon énergie dans la recherche mathématique. Investissement démesuré, certes. Je l'ai payé par une longue stagnation spirituelle, par un "épaississement" progressif, que j'aurai plus d'une fois l'occasion d'évoquer dans les pages de Récoltes et Semailles. Pourtant, à l'intérieur du champ limité d'une activité purement intellectuelle, et par l'éclosion et la maturation d'une vision restreinte au monde des seules choses mathématique, c'étaient des années de créativité intense.

Pendant cette longue période de ma vie, la quasi-totalité de mon temps et de mon énergie était consacré à ce qu'on appelle du *"travail sur pièces"* : au minutieux travail de façonnage, d'assemblage et de rodage, requis pour la construction de toutes pièces des maisons qu'une voix (ou un démon...) intérieur m'enjoignait de bâtir, selon un maître d'œuvre qu'elle me soufflait au fur et à mesure que le travail avançait. Pris par les tâches de "métier" : celles tour à tour de tailleur de pierre, de maçon, de charpentier, voire de plombier, de menuisier et d'ébéniste — rarement ai-je pris le loisir de noter noir sur blanc, ne fût-ce qu'à grands traits, le maître-plan invisible à tous (comme il est apparu plus tard...) sauf à moi, qui au cours des jours, des mois et des années
P 18 guidait ma main avec une sûreté de somnambule[20](*). Il faut dire que le travail sur pièces, dans lequel j'aimais à mettre un soin amoureux, n'était nullement fait pour me déplaire. De plus, le mode d'expression mathématique qui était professé et pratiqué par mes aînés donnait prééminence (à dire le moins) à l'aspect technique du travail, et n'encourageait guère les "digressions" qui se

[20](*) L'image du "somnambule" m'a été inspirée par le titre du remarquable livre de Koestler "Les somnambules" (Calman Lévy), présentant un "Essai sur l'histoire des conceptions de l'Univers", depuis les origines de la pensée scientifique jusqu'à Newton. Un des aspects de cette histoire qui a frappé Koestier et qu'il met en évidence, c'est à quel point, souvent, le cheminement d'un certain point dans notre connaissance du monde, à quelque autre point qui (logiquement et avec le recul) semble tout proche, passe par les détours parfois les plus acadabrants, qui semblent défier la saine raison ; et comment pourtant, à travers ces mille détours qui semblent devoir les fourvoyer à jamais, et avec une "sûreté de somnambule", les hommes partis à la recherche des "clefs" de l'Univers tombent, comme magré eux et sans même s'en rendre compte souvent, sur d'*autres* "clefs" qu'ils étaient loins de prévoir, et qui se révèlent pourtant être "les bonnes".

Par ce que j'ai pu observer autour de moi, au niveau de la découverte mathématique, ces faramineux détours dans le cheminement de la découverte sont le fait de certains chercheurs de grand format, mais nullement de tous. Cela pourrait être dû au fait que depuis deux ou trois siècles, la recherche dans les sciences de la nature, et plus encore en mathématique, se trouve dégagée des présupposés religieux ou métaphysiques impératifs relatifs à une culture et à une époque données, lesquels ont été des freins particulièrement puissants au déployement (pour le meilleur et pour le pire) d'une compréhension "scientifique" de l'Univers. Il est vrai pourtant que certaines idées et des notions les plus fondamentales et les plus évidentes en mathématique (comme celles de déplacement, de groupe, le nombre zéro, le calcul littéral, les coordonnées d'un point dans l'espace, la notion d'ensemble, ou celle de "forme" topologique, sans même parler des nombres négatifs et des nombres complexes) ont mis des millénaires avant de faire leur apparition. Ce sont là autant de signes éloquents de ce "bloc" invétéré, profondément implanté dans la psyché, contre la conception d'idées totalement nouvelles, même dans les cas où celles-ci sont d'une simplicité enfantine et semblent s'imposer d'elles-même avec la force de l'évidence, pendant des générations, voire, pendant des millénaires...

Pour en revenir à mon propre travail, j'ai l'impression que dans celui-ci les "foirages" (plus nombreux peut-être que chez la plupart de mes collègues) se bornent exclusivement à des points de détail, généralement vite repérés par mes propres soins. Ce sont de simples "accidents de parcours", de nature purement "locale" et sans incidence sérieuse sur la validité des intuitions essentielles concernant la situation examinée. Par contre, au niveau des idées et des grandes intuitions directrices, il me semble que mon œuvre est exempte de tout "raté", si incroyable que cela puisse paraître. C'est cette sûreté jamais en défaut pour appréhender à chaque moment, sinon les *aboutissements* ultimes d'une démarche (lesquels restent le plus souvent cachés au regard), mais du moins les *directions* les plus fertiles qui s'offrent pour me mener droit vers les choses *essentielles* — c'est cette sûreté-là qui avait fait résurgir en moi l'image de Koestler du "somnambule".

seraient attardées sur les “motivations” ; voire, celles qui auraient fait mine de faire surgir des brumes quelque image ou vision peut-être inspirante, mais qui, faute de s’être incarnée encore en des constructions tangibles en bois, en pierre ou en ciment pur et dur, s’apparentait plus à des lambeaux de rêve, qu’au travail de l’artisan, appliqué et consciencieux. P 19

Au niveau quantitatif, mon travail pendant ces années de productivité intense s’est concrétisé surtout par quelques douze mille pages de publications, sous forme d’articles, de monographies ou de séminaires[21](*), et par des centaines, si ce n’est des milliers, de notions nouvelles, qui sont entrées dans le patrimoine commun, avec les noms même que je leur avais donné quand je les avais dégagées[22](**). Dans l’histoire des mathématiques, je crois bien être celui qui a introduit dans notre science le plus grand nombre de notions nouvelles, et en même temps, celui qui à été amené, par cela même, à inventer le plus grand nombre de noms nouveaux, pour exprimer ces notions avec délicatesse, et de façon aussi suggestive que je le pouvais.

Ces indications toutes “quantitatives” ne fournissent, certes, qu’une appréhension plus que grossière de mon œuvre, passant à côté de ce qui véritablement en fait l’âme, la vie et la vigueur. Comme je l’écrivais tantôt, ce que j’ai apporté de meilleur dans la mathématique, ce sont les *“points de vue”* nouveaux que j’ai su *entrevoir* d’abord, et ensuite *dégager* patiemment et développer peu ou prou. Comme les notions dont je viens de parler, ces nouveaux points de vue, s’introduisant dans une vaste multiplicité de situations très différentes, sont eux-mêmes quasiment innombrables.

Il est pourtant des points de vue qui sont plus vastes que d’autres, et qui à eux seuls suscitent et englobent une multitude de points de vue partiels, dans une multitude de situations particulières différentes. Un tel point de vue peut être appelé aussi, à juste titre, une *“grande idée”*. Par la fécondité qui est sienne, une telle idée donne naissance à une grouillante progéniture, d’idées qui toutes héritent de sa fécondité, mais dont la plupart (sinon toutes) sont de portée moins vaste que l’idée-mère.

Quant à *exprimer* une grande idée, “la dire” donc, c’est là, le plus souvent, une chose presque aussi délicate que sa conception même et sa lente gestation dans celui qui l’a conçue — ou pour mieux dire, ce laborieux travail de gestation et de formation *n’est autre* justement que celui qui “exprime” l’idée : le travail qui consiste à la dégager patiemment, jour après jour, des voiles de brumes qui l’entourent à sa naissance, pour arriver peu à peu à lui donner forme tangible, en un tableau qui s’enrichit, s’affermit et s’affine au fil des semaines, des mois et des années. *Nommer* simplement l’idée, par quelque formule frappante, ou par des mots-clef plus ou moins techniques, peut être affaire de quelques lignes, voire de quelques pages — mais rares seront ceux qui, sans déjà bien la connaître, sauront entendre ce “nom” et y reconnaître un visage. Et quand l’idée est arrivée en pleine maturité, cent pages peut-être suffiront à l’exprimer, à la pleine satisfaction de l’ouvrier en qui elle était née — comme il se peut aussi que dix mille pages, longuement travaillées et pesées, n’y suffiront pas[23](*). P 20

Et dans l’un comme l’autre cas, parmi ceux qui, pour la faire leur, ont pris connaissance du travail qui enfin présente l’idée en plein essor, telle une spacieuse futaie qui aurait poussé là sur une lande déserte — il y a fort à parier que nombreux seront ceux qui verront bien tous ces arbres vigoureux et sveltes et qui en auront l’usage (qui pour y grimper, qui pour en tirer poutres et planches, et tel autre encore pour faire flamber les feux dans sa cheminette…). Mais rares seront

[21](*) A partir des années 1960, une partie de ces publicationa a été écrite avec la collaboration de collègues (surtout J. Dieudonné) et d’élèves.

[22](**) Les plus imposantes parmi ces notions sont passées en revue dans l’Esquisse Thématique, et dans le Commentaire Histoire qui l’accompagne, lesquels seront inclus dans le volume 4 des Réflexions. Certains des noms m’ont été suggérés par des amis ou des élèves, tels le terme “morphisme lisse” (J. Dieudonné) ou la panoplie “site, champ, gerbe, lien”, développée dans la thèse de Jean Giraud.

[23](*) Au moment de quitter la scène mathématique en 1970, l’ensemble de mes publications (dont bon nombre en collaboration) sur le thème central des *schémas*, devait se monter à quelques dix mille pages. Cela ne représentait pourtant qu’une partie modeste du programme de vaste envergure que je voyais devant moi, concernant les schémas. Ce programme a été abandonné sine die dès mon départ, et ceci malgré le fait qu’à très peu de choses près, *tout* ce qui avait été développé et publié déjà pour être mis à la disposition de tous, est entré d’emblée dans le patrimoine commun des notions et des résultats communément utilisés comme “bien connus”.

La partie de mon programme sur le thème schématique et sur ses prolongements et ramifications, que j’avais accomplie au moment de mon départ, représente à lui seul le plus vaste travail de fondements jamais accompli dans l’histoire de la mathématique, et sûrement un des plus vastes aussi dans l’histoire des Sciences.

ceux qui auront su voir la forêt…

8 **8**. Peut-être peut-on dire que la “grande idée” est le point de vue qui, non seulement se révèle nouveau et fécond, mais qui introduit dans la science un *thème* nouveau et vaste qui l'incarne. Et toute science, quand nous l'entendons non comme un instrument de pouvoir et de domination, mais comme aventure de connaissance de notre espèce à travers les âges, n'est autre chose que cette harmonie, plus ou moins vaste et plus ou moins riche d'une époque à l'autre, qui se déploie au cours des générations et des siècles, par le délicat contrepoint de tous les thèmes apparus tour à tour, comme appelés du néant, pour se joindre en elle et s'y entrelacer.

P 21 Parmi les nombreux points de vue nouveau, que j'ai dégagés en mathématique, il en est *douze*, avec le recul, que j'appellerais des “grandes idées”[24](*). Voir mon œuvre de mathématicien, la “sentir”, c'est voir et “sentir” tant soit peu au moins certaines de ces idées, et ces grands thèmes qu'elles introduisent et qui font et la trame, et l'âme de l'œuvre.

Par la force des choses, certaines de ces idées sort “plus grandes” que d'autres (lesquelles, par là-même, sont “plus petites”). En d'autres termes, parmi ces thèmes nouveaux, certains sont plus vastes que d'autres, et certains plongent plus profond au cœur du mystère des choses
P 22 mathématiques[25](**). Il en est trois (et non des moindres à mes yeux) qui, apparus seulement

---

[24](*) Voici, pour le lecteur mathématicien qui en serait curieux, la liste de ces douze idées maîtresses, ou des “maître-thèmes” de mon œuvre (par ordre chronologique d'apparition) :

1. Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires.
2. Dualité “continue” et “discrète” (catégories dérivées, “six opérations”).
3. Yoga Riemann–Roch–Grothendieck (K-théorie, relation à la théorie des intersections).
4. Schémas.
5. Topos.
6. Cohomologie étale et ℓ-adique.
7. Motifs et groupe de Galois motivique ($\otimes$-catégories de Grothendieck).
8. Cristaux et cohomologie cristalline, yoga “coefficients de De Rham”, “coefficients de Hodge”…
9. “Algèbre topologique” : ∞-champs, dérivateurs ; formalisme cohomologique des topos, comme inspiration pour une nouvelle algèbre homotopique.
10. Topologie modérée.
11. Yoga de géométrie algébrique anabélienne, théorie de Galois–Teichmüller.
12. Point de vue “schématique” ou “arithmétique” pour les polyèdres reguliers et les configurations régulières en tous genres.

Mis à part le premier de ces thèmes, dont un volet important fait partie de ma thèse (1953) et a été développé dans ma période d'analyse fonctionnelle entre 1950 et 1955, les onze autres se sont dégagés au cours de ma période de géomètre, à partir de 1955.

[25](**) Parmi ces thèmes, le plus *vaste* par sa *portée* me paraît être celui des *topos*, qui fournit l'idée d'une synthèse de la géométrie algébrique, de la topologie et de l'arithmétique. Le plus vaste par l'*étendue des developpements* auxquels il a donné lieu dès à present, est le thème des *schémas*. (Voir à ce sujet la note de b. de p. [23](*) page 20 ⟨19⟩.) C'est lui qui fournit le cadre “par excellence” de huit autres parmi ces thèmes envisagés (savoir, tous les autres à l'exclusion des thèmes 1, 5 et 19, en même temps qu'il fournit la notion centrale pour un renouvellement de fond en comble de la géométrie algébrique, et du langage algébrico-géométrique.

Au bout opposé, le premier et le dernier des douze thèmes m'apparaissent comme étant de dimensions plus modestes que les autres. Pourtant, pour ce qui est du dernier, introduisant une optique nouvelle dans le thème fort ancien des polyèdres réguliers et des configurations régulières, je doute que la vie d'un mathématicien qui s'y consacrerait corps et âme suffise à l'épuiser. Quant au premier de tous ces thèmes, celui des produits tensoriels topologiques, il a joué plus le rôle d'un nouvel outil prêt à l'emploi, que celui d'une source d'inspiration pour des développements ultérieurs. Cela n'empêche qu'il m'arrive encore, jusqu'en ces dernières années, de recevoir des échos sporadiques de travaux plus ou moins récents, résolvant (vingt ou trente ans après) certaines des questions que j'avais laissées en suspens.

Les plus profonds (à mes yeux) parmi ces douze thèmes, sont celui des *motifs*, et celui étroitement lié de *géométrie algébrique anabélienne* et du *yoga de Galois–Teichmüller.*

Du point de vue de la *puissance d'outils* parfaitement au point et rodés par mes soins, et d'usage courant dans divers “secteurs de pointe” dans la recherche au cours des deux dernières décennies, ce sont les volets *“schémas”* et *“cohomologie étale et ℓ-adique”* qui me paraissent les plus notables. Pour un mathématicien bien informé, je pense que dès à présent il ne peut guère y avoir de doute que l'outil schématique, comme celui de la cohomologie ℓ-adique qui en est issu, font partie des quelques grands acquis du siècle, venus nourrir et renouveller notre science au cours de ces dernières générations.

après mon départ de la scène mathématique, restent encore à l'état embryonnaire : "officiellement" ils n'existent même pas, puisqu'aucune publication en bonne et du forme n'est là pour leur tenir lieu de certificat de naissance[26](*). Parmi les neuf thèmes apparus dès avant mon départ, les trois derniers, que j'avais laissés en plein essor, restent aujourd'hui encore à l'êtat d'enfance, faute (après mon départ) de mains aimantes pour pourvoir au nécessaire de ces "orphelins", laissés pour compte dans un monde hostile[27](**). Quant aux six autres thèmes, parvenus à pleine maturité au cours des deux décennies précédant mon départ, on peut dire (à une ou deux réserves près[28](***)) qu'ils étaient déjà dès ce moment-là entrés dans le patrimoine commun : parmi la gent géomètre surtout, "tout le monde" de nos jours les entonne sans même plus le savoir (comme Monsieur Jourdain faisait de la prose), à longueur de journée et à tout moment. Ils font partie de l'air qu'on respire, quand on "fait de la géométrie", ou quand on fait de l'arithmétique, de l'algèbre ou de l'analyse tant soit peu "géométriques".

Ces douze grands thèmes de mon œuvre ne sont nullement isolés les uns des autres. Ils font P 23
partie à mes yeux d'une *unité* d'esprit et de propos, présente, telle une note de fond commune et persistante, à travers toute mon œuvre "écrite" et "non écrite". Et en écrivant ces lignes, il m'a semblé retrouver la même note encore — comme un appel ! — à travers ces trois années de travail "gratuit", acharné et solitaire, aux temps où je ne m'étais pas soucié encore de savoir s'il existait des mathématiciens au monde à part moi, tant j'étais pris alors par la fascination de ce qui m'appelait...

Cette unité n'est pas le fait seulement de la marque du même ouvrier, sur les œuvres qui sortent de ses mains. Ces thèmes sont liés entre eux par d'innombrables liens, à la fois délicats et évidents, comme sont reliés entre eux les différents thèmes, clairement reconnaissables chacun, qui se déployent et s'enlacent dans un même et vaste contrepoint — dans une harmonie qui les assemble, les porte en avant et donne à chacun un sens, un mouvement et une plénitude auxquels participent tous les autres. Chacun des thèmes partiels semble naître de cette harmonie plus vaste et en renaître à nouveau au fil des instants, bien plus que celle-ci n'apparaît comme une "somme" ou comme un "résultat", de thèmes constituants qui préexisteraient à elle. Et à dire vrai, je ne peux me défendre de ce sentiment (sans doute saugrenu...) que d'une certaine façon c'est bien cette harmonie, non encore apparue mais qui sûrement "existait" déjà bel et bien, quelque part dans le giron obscur des choses encore à naître — que c'est bien elle qui a suscité tour à tour ces thèmes qui n'allaient prendre tout leur sens que par elle, et que c'est elle aussi qui déjà m'appelait à voix basse et pressante, en ces années de solitude ardente, au sortir de l'adolescence...

Toujours est-il que ces douze maître-thèmes de mon œuvre se trouvent bien tous, comme par une prédestination secrète, concourir à une même symphonie — ou, pour reprendre une image différente, ils se trouvent incarner autant de "points de vue" différents, venant tous concourir à une même et vaste *vision*.

Cette vision n'a commencé à émerger des brumes, à faire apparaître des contours reconnaissables, que vers les années 1957, 58 — des années de gestation intense[29](*). Chose étrange peut-être, cette vision était pour moi si proche, si "évidente", que jusqu'à il y a un an encore[30](*), je P 24

[26](*) Le seul texte "semi-officiel" où ces trois thèmes soient esquisses tant soit peut est l'Esquisse d'un Programme, rédigé en janvier 1984 à l'occasion d'une demande de détachement au CNRS. Ce texte (dont il est question aussi dans l'Introduction 3, "Boussole et Bagages") sera inclus en principe dans le volume 4 des Réflexions.

[27](**) Après enterrement sans tambour ni trompette de ces trois orphelins-là, aux lendemains même de mon départ, deux parmi eux se sont vus exhumer à grandes fanfares et sans mention de l'ouvrier, l'un en 1981 et l'autre (vu le succès sans bavures de l'opération) dès l'année d'après.

[28](***) Le "à peu de choses près" concerne surtout le yoga grothendieckien de dualité (catégories dérivées et six opérations), et celui des topos. Il en sera question de façon circonstanciée (entre bien autres choses) dans les parties II et IV de Récoltes et Semailles (L'Enterrement (1) et (3)).

[29](*) L'année 1957 est celle où je suis amené à dégager le thème *"Riemann–Roch"* (version Grothendieck) — qui, du jour au lendemain, me consacre "grande vedette". C'est aussi l'année de la mort de ma mère, et par là, celle d'une césure importante dans ma vie. C'est une des années les plus intensément créatrices de ma vie, et non seulement au niveau mathématique. Cela faisait douze ans que la totalité de mon énergie était investie dans un travail mathématique. Cette année-là s'est fait jour le sentiment que j'avais à peu près "fait le tour" de ce qu'est le travail mathématique, qu'il serait peut-être temps maintenant de m'investir dans autre chose. C'était un besoin de renouvellement intérieur, visiblement, qui faisait surface alors, pour la première fois de ma vie. J'ai songé à ce moment à me faire écrivain, et pendant plusieurs mois j'ai cessé toute activité mathématique. Finalement, j'ai décidé que je mettrai au moins encore noir sur blanc les travaux mathématiques que j'avais déjà en train, histoire

n'avais songé à lui donner un nom. (Moi dont une des passions pourtant a été de constamment *nommer* les choses qui se découvrent à moi, comme un premier moyen de les appréhender...) Il est vrai que je ne saurais indiquer un moment particulier, qui aurait été vécu comme le moment de l'apparition de cette vision, ou que je pourrais reconnaître comme tel avec le recul. Une vision nouvelle est une chose si vaste, que son apparition ne peut sans doute se situer à un moment particulier, mais qu'elle doit pénétrer et prendre possession progressivement pendant de longues années, si ce n'est sur des générations, de celui ou de ceux qui scrutent et qui contemplent ; comme si des yeux nouveaux devaient laborieusement se former, derrière les yeux familiers auxquels ils sont appelés à se substituer peu à peu. Et la vision est trop vaste également pour qu'il soit question de la "saisir", comme on saisirait la première notion venue apparue au tournant du chemin. C'est pourquoi sans doute il n'y a pas à s'étonner, finalement, que la pensée de nommer une chose aussi vaste, et si proche et si diffuse, ne soit apparue qu'avec le recul, une fois seulement que cette chose était parvenue à pleine maturité.

A vrai dire, jusqu'à il y a deux ans encore ma relation à la mathématique se bornait (mis à part la tâche de l'enseigner) à en *faire* — à suivre une pulsion qui sans cesse me tirait *en avant*,
P 25 dans un "inconnu" qui m'attirait sans cesse. L'idée ne me sérait pas venue de m'arrêter dans cet élan, de poser ne fut-ce que l'espace d'un instant, pour me retourner et voir se dessiner peut-être un chemin parcouru, voire même, pour situer une œuvre révolue. (Que ce soit pour la situer *dans ma vie*, comme une chose à laquelle continuent à me relier des liens profonds et longtemps ignorés ; ou aussi, la situer dans cette aventure collective qu'est *"la mathématique"*.)

Chose étrange encore, pour m'amener à "poser" enfin et à refaire connaissance avec cette œuvre à demi oubliée, ou pour songer seulement à donner un *nom* à la vision qui en a été l'âme, il aura fallu que je me trouve confronté soudain à la réalité d'un Enterrement aux gigantesques proportions : à l'enterrement, par le silence et par la dérision, et de la vision, et de l'ouvrier en qui elle était née...

9 **9**. Sans l'avoir prévu, cet "avant-propos" a fini, de fil en aiguille, par devenir une sorte de présentation en règle de mon œuvre, à l'intention (surtout) du lecteur non mathématicien. Trop engagé déjà pour pouvoir encore reculer, il ne me reste plus qu'à terminer "les présentations" ! Je voudrais essayer tant bien que mal de dire au moins quelques mots sur la *substance* de ces mirifiques "grandes idées" (ou de ces "maître-thèmes") que j'ai fait miroiter dans les pages précédentes, et sur la nature de cette fameuse "vision" en quoi ces idées maîtresses sont censées venir confluer. Faute de pouvoir faire appel à un langage tant soit peu technique, je ne pourrai sans doute que faire passer une image d'un flou extrême (si tant est que quelque chose veuille bien "passer" en effet...)[31](*).

Traditionnellement, on distingue trois types de "qualités" ou d'"aspects" des choses de l'Univers, qui soient objet de la réflexion mathématique : ce sont le *nombre*[32](**), la *grandeur*, et la

---

de quelques mois sans doute, ou une année à tout casser...

Le temps n'était pas mûr encore, sans doute, pour le grand saut. Toujours est-il qu'une fois repris le travail mathématique c'est lui qui m'a repris alors. Il ne m'a plus lâché, pendant douze autres années encore !

L'année qui a suivi cet intermède (1958) est peut-être la plus féconde de toutes dans ma vie de mathématicien. C'est en cette année que se place l'éclosion des deux thèmes centraux de la géométrie nouvelle, avec le démarrage en force de la *théorie des schémas* (sujet de mon exposé au congrès international des mathématiciens à Edinburgh, l'été de cette même année), et l'apparition de la notion de *"site"*, version technique provisoire de la notion cruciale de *topos*. Avec un recul de près de trente ans, je peux dire maintenant que c'est l'année vraiment où est née la vision de la géométrie nouvelle, dans le sillage des deux maître-outils de cette géométrie : les schémas (qui représentent une métamorphose de l'ancienne notion de "variété algébrique"), et les topos (qui représentent une métamorphose, plus profonde encore, de la notion d'espace).

[30](*) Je songe pour la première fois à donner un nom à cette vision dans la réflexion du 4 décembre 1984, dans la sous-note (n° 136_1) à la note "Yin le Serviteur (2) — ou la générosité" (ReS III, page 637).

[31](*) Que cette image doive rester "floue" n'empêche nullement que cette image ne soit fidèle, et qu'elle ne restitue bel et bien quelque chose de l'essence de ce qui est regardé (en l'occurence, mon œuvre). Inversement, une image a beau être nette, elle peut fort bien être distordue, et de plus, n'inclure que l'accessoire et manquer entièrement l'essentiel. Aussi, si tu "accroches" à ce que je vois à dire sur mon œuvre (et sûrement alors quelque chose de l'image en moi "passera" bel et bien), tu pourras te flatter d'avoir mieux saisi ce qui fait l'essentiel dans mon œuvre, qu'aucun peut-être de mes savants collègues !

forme. On peut aussi les appeler l'aspect *"arithmétique"*, l'aspect *"métrique"* (ou "analytique"), et l'aspect *"géométrique"* des choses. Dans la plupart des situations étudiées dans là mathématique, ces trois aspects sont présents simultanément et en interaction étroite. Cependant, le plus souvent, il y a une prédominance bien marquée de l'un des trois. Il me semble que chez la plupart des mathématiciens, il est assez clair (pour ceux qui les connaissent, ou qui sont au courant de leur oeuvre) quel est leur tempérament de base, s'ils sont "arithméticiens", "analystes", ou "géomètres" — et ceci, alors même qu'ils auraient beaucoup de cordes à leur violon, et qu'ils auraient travaillé dans tous les registres et diapasons imaginables. P 26

Mes premières et solitaires réflexions, sur la théorie de la mesure et de l'intégration, se placent sans ambiguïté possible dans la rubrique "grandeur", ou "analyse". Et il en est de même du premier des nouveaux thèmes que j'ai introduits en mathématique (lequel m'apparaît de dimensions moins vastes que les onze autres). Que je sois entré dans la mathématique par le "biais" de l'analyse m'apparaît comme dû, non pas à mon tempérament particulier, mais à ce qu'on peut appeler une "circonstance fortuite" : c'est que la lacune la plus énorme, pour mon esprit épris de généralité et de rigueur, dans l'enseignement qui m'était proposé au lycée comme à l'université, se trouvait concerner l'aspect "métrique" ou "analytique" des choses.

L'année 1955 marque un tournant crucial dans mon travail mathématique : celui du passage de l'"analyse" à la "géométrie". Je me rappelle encore de cette impression saisissante (toute subjective certes), comme si je quittais des steppes arides et revêches, pour me retrouver soudain dans une sorte de "pays promis" aux richesses luxuriantes, se multipliant à l'infini partout où il plait à la main de se poser, pour cueillir ou pour fouiller... Et cette impression de richesse accablante, au delà de toute mesure[33](*), n'a fait que se confirmer et s'approfondir au cours des ans, jusqu'à aujourd'hui même.

C'est dire que s'il y a une chose en mathématique qui (depuis toujours sans doute) me fascine plus que toute autre, ce n'est ni "le nombre" , ni "la grandeur", mais toujours *la forme.* Et parmi les mille-et-un visages que choisit la forme pour se révéler à nous, celui qui m'a fasciné plus que tout autre et continue à me fasciner, c'est *la structure* cachée dans les choses mathématiques. P 27

La structure d'une chose n'est nullement une chose que nous puissions "inventer". Nous pouvons seulement la mettre à jour patiemment, humblement — en faire connaissance, la *"découvrir"*. S'il y a inventivité dans ce travail, et s'il nous arrive de faire œuvre de forgeron ou d'infatigable bâtisseur, ce n'est nullement pour "façonner", ou pour "bâtir", des "structures". Celles-ci ne nous ont nullement attendues pour être, et pour être exactement ce qu'elles sont ! Mais c'est pour *exprimer*, le plus fidèlement que nous le pouvons, ces choses que nous sommes en train de découvrir et de sonder, et cette structure réticente à se livrer, que nous essayons à tâtons, et par un langage encore balbutiant peut-être, à cerner. Ainsi sommes-nous amenés à constamment *"inventer" le langage* apte à exprimer de plus en plus finement la structure intime de la chose mathématique, et à "construire" à l'aide de ce langage, au fur et à mesure et de toutes pièces, les "théories" qui sont censées rendre compte de ce qui a été appréhendé et vu. Il y a là un mouvement de va-et-vient continuel, ininterrompu, entre *l'appréhension* des choses, et l'*expression* de ce qui est appréhendé, par un langage qui s'affine et se re-crée au fil du travail, sous la constante pression du besoin immédiat.

Comme le lecteur l'aura sans doute deviné, ces "théories", "construites de toutes pièces", ne sont autres aussi que ces *"belles maisons"* dont il a été question précédemment : celles dont nous héritons de nos devanciers, et celles que nous sommes amenés à bâtir de nos propres mains, à l'appel et à l'écoute des choses. Et si j'ai parlé tantôt de l'"inventivité" (ou de l'imagination) du

[32](**) Il est entendu ici qu'il s'agit des "nombres" dits "entiers naturels" 0, 1, 2, 3 etc, ou (à la rigueur) des nombres (tels les nombres fractionnaires) qui s'expriment à l'aide de ceux-ci par des opérations de nature élémentaire. Ces nombres ne se prêtent pas, comme les "nombres réels", à mesurer une grandeur susceptible de variation continue, telle la distance entre deux points variables sur une droite, dans un plan ou dans l'espace.

[33](*) J'ai utilisé l'association de mots "accablant, au delà de toute mesure", pour rendre tant bien que mal l'expression an allemand "überwältigend", et son équivalent en anglais "overwhelming". Dans la phrase précédente, l'expression (inadéquate) "impression saisissante" est à comprendre aussi avec cette nuance-là : quand les impressions et sentiments suscités en nous par la confrontation à une splendeur, à une grandeur ou à une beauté hors du commun, nous submergent soudain, au point que toute velléité d'exprimer ce que nous ressentons semble comme anéantie d'avance.

bâtisseur ou du forgeron, il me faudrait ajouter que ce qui en fait l'âme et le nerf secret, ce n'est nullement la superbe de celui qui dit : "je veux ceci, et pas cela !" et qui se complait à décider à sa guise ; tel un piètre architecte qui aurait ses plans tout prêts en tête, avant d'avoir vu et senti un terrain, et d'en avoir sondé les possibilités et les exigences. Ce qui fait la qualité de l'inventivité et de l'imagination du chercheur, c'est la *qualité de son attention*, à l'écoute de la voix des choses. Car les choses de l'Univers ne se lassent jamais de parler d'elles-mêmes et de se révéler, à celui
P 28 qui se soucie d'entendre. Et la maison la plus belle, celle en laquelle apparaît l'amour de l'ouvrier, n'est pas celle qui est plus grande ou plus haute que d'autres. La belle maison est celle qui reflète fidèlement la structure et la beauté cachées des choses.

10 **10**. Mais me voilà diverger encore — je me proposais de parler de maître-thèmes, venant s'unir dans une même vision-mère, comme autant de fleuves venant retourner à la Mer dont ils sont les fils...

Cette vaste vision unificatrice peut être décrite comme une *géométrie nouvelle*. C'est celle, paraît-il, dont Kronecker avait rêvé, au siècle dernier[34](*). Mais la réalité (qu'un rêve hardi parfois fait pressentir ou entrevoir, et qu'il nous encourage à découvrir...) dépasse à chaque fois en richesse et en résonance le rêve même le plus téméraire ou le plus profond. Sûrement, pour plus d'un des volets de cette géométrie nouvelle (si ce n'est pour tous), personne, la veille encore du jour où il est apparu, n'y aurait songé — l'ouvrier lui-même pas plus que les autres.

On peut dire que "le nombre" est apte à saisir la structure des agrégats "discontinus", ou *"discrets"* : les systèmes, souvent finis, formés d'"éléments" ou "objets" pour ainsi dire *isolés* les uns par rapport aux autres, sans quelque principe de "passage continu" de l'un à l'autre. "La grandeur" par contre est la qualité par excellence, susceptible de *"variation continue"* ; par là, elle est apte à saisir les structures et phénomènes continus : les mouvements, espaces, "variétés" en tous genres, champs de force etc. Ainsi, l'arithmétique apparaît (grosso modo) comme la *science des structures discrètes*, et l'analyse, comme la *science des structures continues*.

P 29 Quant à la géométrie, on peut dire que depuis plus de deux mille ans qu'elle existe sous forme d'une science au sens moderne du mot, elle est "à cheval" sur ces deux types de structures, les "discrètes" et les "continues"[35](*). Pendant longtemps d'ailleurs, il n'y avait pas vraiment "divorce", entre *deux* géométries qui auraient été d'espèce différente, l'une discrète, l'autre continue. Plutôt, il y avait deux points de vue différente dans l'investigation des *mêmes* figures géométriques : l'un mettant l'accent sur les propriétés "discrètes" (et notamment, les propriétés numériques et combinatoires), l'autre sur les propriétés "continues" (telles que la position dans l'espace ambiant, ou la "grandeur" mesurée en terme de distances mutuelles de ses points, etc).

C'est à la fin du siècle dernier qu'un divorce est apparu, avec l'apparition et le développement de ce qu'on a appelé parfois la *"géométrie* (algébrique) *abstraite"*. Grosso modo, celle-ci a consisté

[34](*) Je ne connais ce "rêve de Kronecker" que par ouï-dire, quand quelqu'un (peut-être bien que c'était John Tate) m'a dit que j'etais en train de réaliser ce rêve-là. Dans l'enseignement que j'ai reçu de mes aînés, les références historiques étaient rarissimes, et j'ai été nourri, non par la lecture d'auteurs tant soit peu anciens ni même contemporains, mais surtout par la communication, de vive voix ou par lettres interposées, avec d'autres mathématiciens, à commencer par mes aînés. La principale, peut-être même la seule inspiration extérieure pour le soudain et vigoureux démarrage de la théorie des schémas en 1958, a été l'article de Serre bien connu sous le sigle FAC ("Faisceaux algébriques cohérents"), paru quelques années plus tôt. Celui-ci mis à part, ma principale inspiration dans le développement ultérieur de la théorie s'est trouvée découler d'elle-même, et se renouveler au fil des ans, par les seules exigences de simplicité et de cohérence internes, dans un effort pour rendre compte dans ce nouveau contexte, de ce qui était "bien connu" en géométrie algébrique (et que j'assimilais au fur et à mesure qu'il se transformait entre mes mains), et de que ce "connu" me faisait pressentir.

[35](*) A vrai dire, traditionnellement c'est l'aspect "continu" qui était au centre de l'attention du géomètre, alors que les propriétés de nature "discrète", et notamment les propriétés numériques et combinatoires, étaient passées sous silence ou traitées par dessous la jambe. C'est avec émerveillement que j'ai découvert, il y a une dizaine d'années, la richesse de la théorie combinatoire de l'icosaèdre, alors que ce thème n'est pas même effleuré (et probablement, pas même vu) dans le classique livre de Klein sur l'icosaèdre. Je vois un autre signe frappant de cette négligence (deux fois millénaire) des géomètres vis-à-vis des structures discrètes qui s'introduisent spontanément en géométrie : c'est que la notion de groupe (de symétries, notamment) ne soit apparue qu'au siècle dernier, et que de plus, elle ait été d'abord introduite (par Evariste Galois) dans un contexte qui n'était pas considéré alors comme ressortissant de la "géométrie". Il est vrai que de nos jours encore, nombreux sont les algèbristes qui n'ont toujours pas compris que la théorie de Galois est bien, dans son essence, une *vision "géométrique"*, venant renouveler notre compréhension des phénomènes dits "arithmétiques"...

à introduire, pour chaque nombre premier p, une géométrie (algébrique) "de caractéristique p", calquée sur le modèle (continu) de la géométrie (algébrique) héritée des siècles précédents, mais dans un contexte pourtant, qui apparaissait comme irréductiblement "discontinu", "discret". Ces nouveaux objets géométriques ont pris une importance croissante depuis les débuts du siècle, et ceci, tout particulièrement, en vue de leurs relations étroites avec l'arithmétique, la science par excellence de la structure discrète. Il semblerait que ce soit une des idées directrices dans l'œuvre d'*André Weil*[36](**), peut-être même la principale idée-force (restée plus ou moins tacite dans son œuvre écrite, comme il se doit), que "la" géométrie (algébrique), et tout particulièrement les géométries "discrètes" associées aux différents nombres premiers, devaient fournir la clef pour P 30
un renouvellement de vaste envergure de l'arithmétique. C'est dans cet esprit qu'il a dégagé, en 1949, les célèbres *"conjectures de Weil"*. Conjectures absolument époustouflantes, à vrai dire, qui faisaient entrevoir, pour ces nouvelles "variétés" (ou "espaces") de nature discrète, la possibilité de certains types de constructions et d'arguments[37](*) qui jusque là ne semblaient pensables que dans le cadre des seuls "espaces" considérés comme dignes de ce nom par les analystes — savoir, les espaces dits "topologiques" (où la notion de variation continue a cours).

On peut considérer que la géométrie nouvelle est avant toute autre chose, une *synthèse* entre ces deux mondes, jusque là mitoyens et étroitement solidaires, mais pourtant séparés : le *monde "arithmétique"*, dans lequel vivent les (soi-disants) "espaces" sans principe de continuité, et le *monde de la grandeur continue*, où vivent les "espaces" au sens propre du terme, accessibles aux moyens de l'analyste et (pour cette raison même) acceptés par lui comme dignes de giter dans la cité mathématique. *Dans la vision nouvelle, ces deux mondes jadis séparés, n'en forment plus qu'un seul.*

Le premier embryon de cette vision d'une *"géométrie arithmétique"* (comme je propose d'appeler cette géométrie nouvelle) se trouve dans les conjectures de Weil. Dans le développement de certains de mes thèmes principaux[38](**), ces conjectures sont restées ma principale source d'inspiration, tout au long des années entre 1958 et 1969. Dès avant moi, d'ailleurs, *Oscar Zariski* d'un côté, puis *Jean-Pierre Serre* de l'autre, avaient développé pour les espaces-sans-foi-ni-loi de la géométrie algébrique "abstraite" certaines méthodes "topologiques", inspirées de celles qui avaient cours précédemment pour les "espaces bon teint" de tout le monde[39](***), Leurs idées, P 31
bien sûr, ont joué un rôle important lors de mes premiers pas dans l'édification de la géométrie arithmétique ; plus, il est vrai, comme points de départ et comme *outils* (qu'il m'a fallu refaçonner plus ou moins de toutes pièces, pour les besoins d'un contexte beaucoup plus vaste), que comme une source d'inspiration qui aurait continué à nourrir mes rêves et mes projets, au cours des mois et des années. De toutes façons, il était bien clair d'emblée que, même refaçonnés, ces outils étaient très en deçà de ce qui était requis, pour faire même les tout premiers pas en direction des fantastiques conjectures.

---

[36](**) André Weil, mathématicien français émigré aux Etats-Unis, est un des "membres fondateurs" du "groupe Bourbaki", dont il sera pas mal question dans la première partie de Récoltes et Semailles (ainsi d'ailleurs que de Weil lui-même, occasionnellement).

[37](*) (A l'intention du lecteur mathématicien.) Il s'agit ici des "constructions et arguments" liés à la théorie cohomologique des variétés différentiables ou complexés, et notamment de ceux impliquant la formule des points fixes de Lefschetz, et la théorie de Hodge.

[38](**) Il s'agit des quatre thèmes "médians" (n° 5 à 8), savoir ceux des *topos*, de la *cohomologie étale* et ℓ-adique, des *motifs*, et (dans une moindre mesure) celui des *cristaux*. J'ai dégagé ces thèmes tour à tour entre 1958 et 1966.

[39](***) (A l'intention du lecteur mathématicien.) La principale contribution de Zariski dans ce sens me paraît l'introduction de la "topologie de Zariski" (qui plus tard a été un outil essentiel pour Serre dans FAC), et son "principe de connexité" et ce qu'il a appelé sa "théorie des fonctions holomorphes" — devenus entre ses mains la théorie des schémas formels, et les "théorèmes de comparaison" entre le formel et l'algébrique (avec, comme deuxième source d'inspiration, l'article fondamental GAGA de Serre). Quant à la contribution de Serre à laquelle je fais allusion dans le texte, il s'agit bien sur, avant tout, de l'introduction par lui, en géométrie algébrique abstraite, du point de vue des *faisceaux* (introduit par *Jean Leray* une douzaine d'années auparavant, dans un conteste tout différent), dans cet autre article fondamental déjà cité FAC ("Faisceaux algébriques cohérents").

A là lumière de ces "rappels", si je devais nommer les "ancêtres" immédiats de la nouvelle vision géométrique, ce sont les noms de *Oscar Zariski*, *André Weil*, *Jean Leray* et *Jean-Pierre Serre* qui s'imposent à moi aussitôt. Parmi eux Serre a joué un rôle à part, du fait que c'est par son intermédiaire surtout que j'ai eu connaissance non seulement de ses propres idées, mais aussi des idées de Zariski, de Weil et de Leray qui ont eu à jouer un rôle dans l'éclosion et dans le développement de la géométrie nouvelle.

11 **11**. Les deux idées-forces cruciales dans le démarrage et dans le développement de la géométrie nouvelle, ont été celle de *schéma* et celle de *topos*. Apparues à peu près simultanément et en étroite symbiose l'une avec l'autre[40](*), elles ont été comme un seul et même *nerf moteur* dans l'essor spectaculaire de la nouvelle géométrie, et ceci dès l'année même de leur apparition. Pour terminer ce tour d'horizon sur mon œuvre, il me reste à dire quelque mots au sujet tout au moins de ces deux idées-là.

La notion de schéma est la plus naturelle, la plus "évidente" imaginable, pour englober en une
P 32 notion unique la série infinie de notions de "variété" (algébrique) qu'on maniait précédemment (*une* telle notion pour chaque nombre premier[41](*)...). De plus, un seul et même "schéma" (ou "variété" nouveau style) donne naissance, pour *chaque* nombre premier p, à une "variété (algébrique) de caractéristique p" bien déterminée. La collection de ces différentes variétés des différentes caractéristiques peut alors être visualisée comme une sorte d'"éventail (infini) de variétés" (une pour chaque caractéristique). Le "schéma" *est* cet éventail magique, qui relie entre eux, comme autant de "branches" différentes, ses "avatars" ou "incarnations" de toutes les caractéristiques possibles. Par là-même, il fournit un efficace "principe de passage" pour relier entre elles des "variétés", ressortissant de géométries qui jusque là étaient apparues comme plus ou moins isolées, coupées les unes des autres. A présent, elles se trouvent englobées dans une "géométrie" commune et reliées par elle. On pourrait l'appeler la *géométrie schématique*, première ébauche de cette "géométrie arithmétique" en quoi elle allait s'épanouir dans les années suivantes.

L'idée même de schéma est d'une simplicité enfantine — si simple, si humble, que personne avant moi n'avait songe à se pencher si bas. Si "bébête" même, pour tout dire, que pendant des années encore et en dépit de l'évidence, pour beaucoup de mes savants collègues, ça faisait vraiment "pas sérieux" ! Il m'a fallu d'ailleurs des mois de travail serré et solitaire, pour me convaincre dans mon coin que "ça marchait" bel et bien — que le nouveau langage, tellement bébête, que j'avais l'incorrigible naïveté de m'obstiner à vouloir tester, était bel et bien adéquat pour saisir, dans une lumière et avec une finesse nouvelles, et dans un cadre commun désormais, certaines des toutes premières intuitions géométriques attachées aux précédentes "géométries de caractéristique p". C'était le genre d'exercice, jugé d'avance idiot et sans espoir par toute personne "bien informée", que j'étais le seul sans doute, parmi tous mes collègues et amis, à pouvoir avoir jamais idée de me mettre en tête, et même (mû par un démon secret...) par mener à bonne fin envers et contre tous !

Plutôt que de me laisser distraire par les consensus qui faisaient loi autour de moi, sur ce qui est "sérieux" et ce qui ne l'est pas, j'ai *fait confiance* simplement, comme par le passé, à l'humble voix des choses, et à cela en moi qui sait écouter. La récompense a été immédiate, et au delà de toute attente. En l'espace de ces quelques mois, sans même "faire exprès", j'avais mis le doigt
P 33 sur des outils puissants et insoupçonnés. Ils m'ont permis, non seulement de retrouver (comme en jouant) des résultats anciens, réputés ardus, dans une lumière plus pénétrante et de les dépasser, mais aussi d'aborder enfin et de résoudre des problèmes de "géométrie de caractéristique p" qui jusque là étaient apparus comme hors d'atteinte par tous les moyens alors connus[42](*).

Dans notre connaissance des choses de l'Univers (qu'elles soient mathématiques ou autres), le pouvoir rénovateur en nous n'est autre que l'*innocence*. C'est l'innocence originelle que nous avons tous reçue en partage à notre naissance et qui repose en chacun de nous, objet souvent de notre mépris, et de nos peurs les plus secrètes. Elle seule unit l'humilité et la hardiesse qui nous font

[40](*) Il est question de ce démarrage, qui se place en 1958, dans la note de b. de p. [29](*) page 23 ⟨21⟩. La notion de site ou de *"topologie de Grothendieck"* (version provisoire de celle de topos) est apparue dans le sillage immédiat de la notion da schéma. C'est elle à son tour qui fournit le langage nouveau de la "localisation" ou de "la descente", utilisé à chaque pas dans le développement du thème et de l'outil schématiques. La notion plus intrinsèque et plus géométrique de *topos*, restée d'abord implicite au cours des années suivantes, se dégage surtout à partir de 1963, avec le développement de la cohomologie étale, et s'impose peu à peu à moi comme la notion la plus fondamentale.

[41](*) Il convient d'inclure dans cette série également le cas $p = \infty$, correspondant aux variétés algébriques "de caractéristique nulle".

[42](*) Le compte rendu de ce "démarrage en force" de la théorie des schémas fait l'objet de mon exposé au Congrès International des Mathématiciens à Edinburgh, en 1958. Le texte de cet exposé me semble une des meilleurs introductions au point de vue des schémas, de nature (peut-être) à motiver un lecteur géomètre à se familiariser tant bien que mal avec l'imposant traité (ultérieur) "Eléments de Géométrie Algébrique", exposant de façon circonstanciée (et sans faire grâce d'aucun détail technique) les nouveaux fondements et les nouvelles techniques de la géométrie algébrique.

pénétrer au cœur des choses, et qui nous permettent de laisser les choses pénétrer en nous et de nous en imprégner.

Ce pouvoir-là n'est nullement le privilège de “dons” extraordinaires — d'une puissance cérébrale (disons) hors du commun pour assimiler et pour manier, avec dextérité et avec aisance, une masse impressionnante de faits, d'idées et de techniques connus. De tels dons sont certes précieux, dignes d'envie sûrement pour celui qui (comme moi) n'a pas eté comblé ainsi à sa naissance, “au delà de toute mesure”.

Ce ne sont pas ces dons-là, pourtant, ni l'ambition même la plus ardente, servie par une volonté sans failles, qui font franchir ces “cercles invisibles et impérieux” qui enferment notre Univers. Seule l'innocence les franchit, sans le savoir ni s'en soucier, en les instants où nous nous retrouvons seul à l'écoute des choses, intensément absorbé dans un jeu d'enfant…

12. L'idée novatrice du “schéma”, nous venons de le voir, est celle qui permet de relier entre *12*
elles les différentes “géométries” associées aux différents nombres premiers (ou différentes “caractéristiques”). Ces géométries, pourtant, restaient encore chacune de nature essentiellement “discrète” ou “discontinue”, en contraste avec la géométrie traditionnelle léguée par les siècles passés (et remontant à Euclide). Les nouvelles idées introduites par Zariski et par Serre restituaient dans une certaine mesure, pour ces géométries, une “dimension” de continuité, héritée P 34
aussitôt par la “géométrie schématique” qui venait d'apparaître, aux fins de les unir. Mais pour ce qui était des “fantastiques conjectures” (de Weil), on était très loin du compte. Ces “topologies de Zariski” étaient, de ce point de vue, à tel point grossières, que c'était quasiment comme si on en était resté encore au stade des “agrégats discrets”. Ce qui manquait, visiblement, était quelque principe nouveau, qui permette de relier ces objets géométriques (ou “variétés”, ou “schémas”) aux “espaces” (topologiques) habituels, ou “bon teint” ; ceux, disons, dont les “points” apparaissent comme nettement *séparés* les uns des autres, alors que dans les espaces-sans-foi-ni-loi introduits par Zariski, les points ont une fâcheuse tendance à s'agglutiner les uns aux autres…

C'était l'apparition d'un tel “principe nouveau” décidément, et rien de moins, qui pouvait faire se consommer ces “épousailles du nombre et de la grandeur” ou de la “géométrie du discontinu” avec celle du “continu”, dont un premier pressentiment se dégageait des conjectures de Weil.

La notion d'*“espace”* est sans doute une des plus anciennes en mathématique. Elle est si fondamentale dans notre appréhension “géométrique” du monde, qu'elle est restée plus ou moins tacite pendant plus de deux millénaires. C'est au cours du siècle écoulé seulement que cette notion a fini, progressivement, par se détacher de l'emprise tyrannique de la perception immédiate (d'un seul et même “espace” qui nous entoure), et de sa théorisation traditionnelle (“euclidienne”), pour acquérir son autonomie et sa dynamique propres. De nos jours, elle fait partie des quelques notions les plus universellement et les plus couramment utilisées en mathématique, familière sans doute à tout mathématicien sans exception. Notion protiforme d'ailleurs s'il en fut, aux cents et mille visages, selon le type de structures qu'on incorpore à ces espaces, depuis les plus riches de toutes (telles les vénérables structures “euclidiennes”, ou les structures “affines” et “projectives” , ou encore les structures “algébriques” des “variétés” de même nom, qui les généralisent et qui assouplissent) jusqu'aux plus dépouillées : celles où tout élément d'information “quantitatif” quel qu'il soit semble disparu sans retour, et où ne subsistent plus que la quintessence qualitative de la notion de *“proximité”* ou de celle de *“limite”*[43](*), et la version la plus élusive de l'intuition de la *forme* (dit “topologique”). La plus dépouillée de toutes parmi ces notions, celle qui jusqu'à présent, P 35
au cours du demi-siècle écoulé, avait tenu lieu d'une sorte de vaste giron conceptuel commun pour englober toutes les autres, était celle d'*espace topologique*. L'étude de ces espaces constitue l'une des branches les plus fascinantes, les plus vivaces de la géométrie : la *topologie*.

Si élusif que puisse paraître de prime abord cette structure “de qualité pure” incarnée par un “espace” (dit “topologique”), en l'absence de toute donnée de nature quantitative (telle la distance entre deux points, notamment) qui nous permette de nous raccrocher à quelque intuition familière de “grandeur” ou de “petitesse”, on est pourtant arrivé, au cours du siècle écoulé, à cerner finement

[43](*) Parlant de la notion de “limite”, c'est surtout à celle de “passage à la limite” que je pense ici, plutôt qu'à celle (plus familière au non mathématicien) de “frontière”.

ces espaces dans les mailles serrées et souples d'un langage soigneusement "taillé sur pièces". Mieux encore, on a inventé et fabriqué de toutes pièces des sortes de "mètres" ou de "toises" pour servir tout de même, envers et contre tout, à attacher des sortes de "mesures" (appelées "invariants topologiques") à ces "espaces" tentaculaires qui semblaient se dérober, telles des brumes insaisissables, à toute tentative de mensuration. Il est vrai que la plupart de ces invariants, et les plus essentiels, sont de nature plus subtile qu'un simple "nombre" ou une "grandeur" — ce sont plutôt eux-mêmes des structures mathématiques plus ou moins délicates, attachées (à l'aide de constructions plus ou moins sophistiquées) à l'espace envisagé. L'un des plus anciens et des plus cruciaux de ces invariants, introduits déjà au siècle dernier (par le mathématicien italien *Betti*), est formé des différents "groupes" (ou "espaces") dits de "cohomologie", associés à l'espace[44](*).
P 36 Ce sont eux qui interviennent (surtout "entre les lignes", il est vrai) dans les conjectures de Weil, qui en font la "raison d'être" profonde et qui (pour moi du moins, "mis dans le bain" par les explications de Serre) leur donnent tout leur sens. Mais la possibilité d'associer de tels invariants aux variétés algébriques "abstraites" qui interviennent dans ces conjectures, de façon à répondre aux desiderata très précis exigés pour les besoins de cette cause-là — c'était là un simple espoir. Je doute qu'en dehors de Serre et de moi-même, personne d'autre (pas même, et surtout, André Weil lui-même ![45](*)) n'y croyait vraiment...

Peu de temps avant, notre conception de ces invariants de cohomologie s'était d'ailleurs vue enrichir et renouveler profondément par les travaux de *Jean Leray* (poursuivis en captivité en
P 37 Allemagne, pendant la guerre, dans la première moitié des années quarante). L'idée novatrice essentielle était celle de *faisceau* (abélien) sur un espace, auxquels Leray associe une suite de "groupes de cohomologie" correspondants (dits "à coefficients dans ce faisceau"). C'était comme si le bon vieux "mètre cohomologique" standard dont on disposait jusqu'à présent pour "arpenter" un espace, s'était soudain vu multiplier en une multitude inimaginablement grande de nouveaux

[44](*) A vrai dire, les invariants introduits par Betti étaient les invariants d'*homologie*. La *cohomologie* en constitue une version plus ou moins équivalente, "duale", introduite beaucoup plus tard. Cet aspect a acquis une prééminence sur l'aspect initial, "homologique", surtout (sans doute) à la suite de l'introduction, par Jean Leray, du point de vue des faisceaux, dont il est question plus bas. Au point de vue technique, on peut dire qu'une grande partie de mon œuvre de géomètre a consisté à dégager, et à développer plus ou moins loin, les théories cohomologiques qui manquaient, pour les espaces et variétés en tous genres et surtout, pour les "variétés algébriques" et les schémas. Chemin faisant, j'ai été amené aussi à réinterpréter les invariants homologiques traditionnels en termes cohomologiques, et par là-même, à les faire voir dans un jour entièrement nouveau.

Il y a de nombreux autres "invariants topologiques" qui ont été introduits par les topologues, pour cerner tel type de propriétés ou tel autre des espaces topologiques. A part la "dimension" d'un espace, et les invariants (co)homologiques, les premiers autres invariants sont les "groupes d'homotopie". J'en ai introduit un autre en 1957, le groupe (dit "de Grothendieck") $K(X)$, qui a connu aussitôt une grande fortune, et dont l'importance (tant en topologie qu'en arithmétique) ne cesse de se confirmer.

Une foule de nouveaux invariants, de nature plus subtile que les invariants actuellement connus et utilisés, mais que je sens fondamentaux, sont prévus dans mon programme de "topologie modérée" (dont une esquisse très sommaire se trouve dans l'"Esquisse d'un Programme", à paraître dans le volume 4 des Réflexions). Ce programme est basé sur la notion de "théorie modérée" ou d'"espace modéré", qui constitue, un peu comme celle de topos, une (deuxième) "métamorphose de la notion d'espace". Elle est bien plus évidente (me semble-t-il) et moins profonde que cette dernière. Je prévois que ses retombées immédiates sur la topologie "proprement dite" vont être pourtant nettement plus percutantes, et qu'elle va transformer de fond en comble le "métier" de topologue géomètre, par une transformation profonde du contexte conceptuel dans lequel il travaille. (Comme cela a été le cas aussi en géométrie algébrique avec l'introduction du point de vue des schémas.) J'ai d'ailleurs envoyé mon "Esquisse" à plusieurs de mes anciens amis et illustres topologues, mais il ne semble pas qu'elle ait eu le don d'en intéresser aucun...

[45](*) Chose paradoxale, Weil avait un "bloc" tenace, apparemment viscéral, contre le formalisme cohomologique — alors que ce sont en grande partie ses célèbres conjectures qui ont inspiré le développement des grandes théories cohomologiques en géométrie algébrique, à partir des années 1955 (avec Serre donnant le coup d'envoi, avec son article fondamental FAC, déjà mentionné dans une précédente note de bas de page).

Il me semble que ce "bloc" fait partie, chez Weil, d'une aversion générale contre tous les "gros fourbis", contre tout ce qui s'apparente à un formalisme (quand celui-ci ne peut se résumer en quelques pages), ou à une "construction" tant soit peu imbriquée. Il n'avait rien du "bâtisseur", certes, et c'est visiblement à son corps défendant qu'il s'est vu contraint, au cours des années trente, à développer les premiers fondements de géométrie algébrique "abstraits" qui (vu ces dispositions) se sont révélées un véritable "lit de Procruste" pour l'usager.

Je ne sais s'il m'en a voulu d'être allé au delà, et de m'être investi à construire les vastes demeures, qui ont permis aux rêves d'un Kronecker et au sien de s'incarner en un langage et en des outils délicats et efficaces. Toujours est-il qu'à aucun moment il ne m'a fait un mot de commentaire au sujet du travail dans lequel il me voyait engagé, ou de celui qui était déjà fait. Je n'ai pas non plus eu d'écho à Récoltes et Semailles, que je lui avais envoyé il y a plus de trois mois, avec une dédicace chaleureuse de ma main.

“mètres” de toutes les tailles, formes et substances imaginablés, chacun intimement adapté à l’espace en question, et dont chacun nous livre à son sujet des informations d’une précision parfaite, et qu’il est seul à pouvoir nous donner. C’était là l’idée maîtresse dans une transformation profonde dans notre approche des espaces en tous genres, et sûrement une des idées les plus cruciales apparues au cours de ce siècle. Grâce surtout aux travaux ultérieurs de Jean-Pierre Serre, les idées de Leray ont eu comme premiers fruits, au cours de la décennie déjà suivant leur apparition, un redémarrage impressionnant dans la théorie des espaces topologiques (et notamment, de leurs invariants dits “d’homotopie”, intimement liés à la cohomologie), et un autre redémarrage, non moins capital, de la géométrie algébrique dite “abstraite” (avec l’article fondamental “FAC” de Serre, paru en 1955). Mes propres travaux en géométrie, à partir de 1955, se placent en continuité avec ces travaux de Serre, et par là même, avec les idées novatrices de Leray.

13. Le point de vue et le langage des faisceaux introduit par Leray nous a amené à regarder les *13*
“espaces” et “variétés” en tous genres dans une lumière nouvelle. Ils ne touchaient pas, pourtant, à la notion même d’espace, se contentant de nous faire appréhender plus finement, avec des yeux nouveaux, ces traditionnels “espaces”, déjà familiers à tous. Or, il s’est avéré que cette notion d’espace est inadéquate pour rendre compte des “invariants topologiques” les plus essentiels qui expriment la “forme” des variétés algébriques “abstraites” (comme celles auxquelles s’appliquent les conjectures de Weil), voire celle des “schémas” généraux (généralisant les anciennes variétés). Pour les “épousailles” attendues, “du nombre et de la grandeur”, c’était comme un lit décidément étriqué, où l’un seulement des futurs conjoints (à savoir, l’épousée) pouvait à la rigueur trouver à se nicher tant bien que mal, mais jamais des deux à la fois ! Le “principe nouveau” qui restait à trouver, pour consommer les épousailles promises par des fées propices, ce n’était autre aussi que ce “lit” spacieux qui manquait aux futurs époux, sans que personne jusque là s’en soit seulement aperçu…

Ce “lit à deux places” est apparu (comme par un coup de baguette magique…) avec l’idée du
topos. Cette idée englobe, dans une intuition topologique commune, aussi bien les traditionnels P 38
espaces (topologiques), incarnant le monde de la grandeur continue, que les (soi-disant) “espaces” (ou “variétés”) des géomètres algébristes abstraits impénitents, ainsi que d’innombrables autres types de structures, qui jusque là avaient semblé rivées irrémédiablement au “monde arithmétique” des agrégats “discontinus” ou “discrets”.

C’est le point de vue des faisceaux qui a été le guide silencieux et sûr, la clef efficace (et nullement secrète), ne menant sans atermoiements ni détours vers la chambre nuptiale au vaste lit conjugal. Un lit si vaste en effet (telle une vaste et paisible rivière très profonde…), que

> “tous les chevaux du roi
> y pourraient boire ensemble…”

— comme nous le dit un vieil air que sûrement tu as dû chanter toi aussi, ou au moins l’entendre chanter. Et celui qui a été le premier à le chanter a mieux senti la beauté secrète et la force paisible du topos, qu’aucun de mes savants élèves et amis d’antan…

La clef a été la même, tant dans l’approche initiale et provisoire (via la notion très commode, mais non intrinsèque du “site”), que dans celle du topos. C’est l’idée du topos que je voudrais essayer à présent de décrire.

Considérons l’ensemble formé de *tous* les faisceaux sur un espace (topologique) donné, ou, si on veut, cet arsenal prodigieux formé de *tous* ces “mètres” servant à l’arpenter[46](*). Nous considérons cet “ensemble” ou “arsenal” comme muni de sa structure la plus évidente, laquelle y apparaît, si on peut dire, “à vue de nez” ; à savoir, une structure dite de “catégorie”. (Que le lecteur non mathématicien ne se trouble pas, de ne pas connaître le sens technique de ce terme. Il n’en aura nul besoin pour la suite.) C’est cette sorte de “superstructure d’arpentage”, appelée “catégorie des faisceaux” (sur l’espace envisagé), qui sera dorénavant considéré comme “incarnant” ce qui

[46](*) (A l’intention du mathématicien) A vrai dire, il s’agit ici des faisceaux d’*ensembles*, et non des faisceaux *abéliens*, introduits par Leray comme coefficients les plus généraux pour former des “groupes de cohomologie”. Je crois d’ailleurs être le premier à avoir travaillé systématiquement avec les faisceaux d’ensembles (à partir de 1955, dans mon article “A general theory of fibre spaces with structure sheaf” à l’Université de Kansas).

est le plus essentiel à l'espace. C'est bien là chose licite (pour le "bon sens mathématique"), car il se trouve qu'on peut "reconstituer" de toutes pièces un espace topologique[47](**) en termes de
P 39 cette "catégorie de faisceaux" (ou de cet arsenal d'arpentage) associée. (De le vérifier est un simple exercice — une fois la question posée, certes...) Il n'en faut pas plus pour être assuré que (s'il nous convient pour une raison ou une autre) nous pouvons désormais "oublier" l'espace initial, pour ne plus retenir et ne nous servir que de la "catégorie" (ou de l'"arsenal") associée, laquelle sera considérée comme l'incarnation la plus adéquate de la "structure topologique" (ou "spatiale") qu'il s'agit d'exprimer.

Comme si souvent en mathématique, nous avons réussi ici (grâce à l'idée cruciale de "faisceau", ou de "mètre cohomologique") à exprimer une certaine notion (celle d'"espace" en l'occurence) en termes d'une autre (celle de "catégorie"), A chaque fois, la découverte d'une telle *traduction* d'une notion (exprimant un certain type de situations) en termes d'une autre (correspondant à un autre type de situations), enrichit notre compréhension et de l'une et de l'autre notion, par la confluence inattendue des intuitions spécifiques qui se rapportent soit à l'une, soit à l'autre. Ainsi, une situation de nature "topologique" (incarnée par un espace donné) se trouve ici traduite par une situation de nature "algébrique" (incarnée par une "catégorie") ; ou, si on veut, le "continu" incarné par l'espace, se trouve "traduit" ou "exprimé" par la structure de catégorie, de nature "algébrique" (et jusque là perçue comme étant de nature essentiellement "discontinue" ou "discrète").

Mais ici, il y a plus. La première de ces notions, celle d'espace, nous était apparue comme une notion en quelque sorte "maximale" — une notion si générale déjà, qu'on imagine mal comment en trouver encore une extension qui reste "raisonnable". Par contre, il se trouve que de l'autre côté du miroir[48](*), ces "catégories" (ou "arsenaux") sur lesquels on tombe, en partant d'espaces topologiques, sont de nature très particulière. Elles jouissent en effet d'un ensemble de propriétés fortement typées[49](**), qui les font s'apparenter à des sortes de "pastiches" de la plus simple imaginable d'entre elles — celle qu'on obtient en partant d'un espace réduit à un seul point. Ceci dit, un "espace nouveau style" (ou *topos*), généralisant les espaces topologiques traditionnels, sera décrit tout simplement comme une "catégorie" qui, sans provenir forcément d'un espace ordinaire, possède néanmoins toutes ces bonnes propriétés (explicitement désignées une fois pour toutes, bien sûr) d'une telle "catégorie de faisceaux".

*   *
*

P 40 Voici donc l'idée nouvelle. Son apparition peut être vue comme une conséquence de cette observation, quasiment enfantine à vrai dire, que ce qui compte vraiment dans un espace topologique, ce ne sont nullement ses "points" ou ses sous-ensembles de points[50](*), et les relations de proximité etc entre ceux-ci, mais que ce sont les *faisceaux* sur cet espace, et la *catégorie* qu'ils forment. Je n'ai fait, en somme, que mener vers sa conséquence ultime l'idée initiale de Leray — et ceci fait, *franchir le pas.*

Comme l'idée même des faisceaux (due à Leray), ou celle des schémas, comme toute "grande idée" qui vient bousculer une vision invétérée des choses, celle des topos à de quoi déconcerter par son caractère de naturel, d'"évidence", par sa simplicité (à la limite, dirait-on, du naïf ou du simpliste, voire du "bébète") — par cette qualité particulière qui nous fait nous écrier si souvent :

[47](**) (A l'intention du mathématicien) A strictement parler, ceci n'est vrai que pour des espaces dits "sobres". Ceux-ci comprennent cependant la quasi-totalité des espaces qu'on rencontre communément, et notamment tous les espaces "séparés" chers aux analystes.

[48](*) Le "miroir" dont il est question ici, comme dans Alice au pays des merveilles, eat celui qui donne comme "image" d'un espace, placé devant lui, la "catégorie" associée, considérée comme une sorte de "double" de l'espace, "de l'autre côté du miroir"...

[49](**) (A l'intention du mathématicien) Il s'agit ici surtout de propriétés que j'ai introduites en théorie des catégories sous le nom de "propriétés d'exactitude" (en même temps que la notion catégorique moderne de "limites" inductives et projectives générales). Voir "Sur quelques points d'algèbre homologique", *Tohoku math. journal*, 1957 (p. 119–221).

[50](*) Ainsi, on peut construire des topos très "gros", qui n'ont qu'un seul "point", ou même pas de "points" du tout !

"Oh, ce n'est que ça !", d'un ton mi-déçu, mi-envieux ; avec en plus, peut-être, ce sous entendu du "farfelu", du "pas sérieux", qu'on réserve souvent à tout ce qui déroute par un excès de simplicité imprévue. A ce qui vient nous rappeler, peut-être, les jours depuis longtemps enfouis et reniés de notre enfance...

14. La notion de schéma constitue un vaste élargissement de la notion de "variété algébrique", *14*
et à ce titre elle a renouvelé de fond en comble la géométrie algébrique léguée par mes devanciers. Celle de topos constitue une extension insoupçonnée, pour mieux dire, *une métamorphose de la notion d'espace*. Par là, elle porte la promesse d'un renouvellement semblable de la topologie, et au delà de celle-ci, de la géométrie. Dès à présent d'ailleurs, elle a joué un rôle crucial dans l'essor de la géométrie nouvelle (surtout à travers les thèmes cohomologiques ℓ-adique et cristallin qui en sont issus, et à travers eux, dans la démonstration des conjectures de Weil). Comme sa sœur aînée (et quasi-jumelle), elle possède les deux caractères complémentaires essentiels pour toute généralisation fertile, que voici.

Primo, la nouvelle notion n'est *pas trop vaste*, en ce sens que dans les nouveaux "espaces" (appelés plutôt "topos", pour ne pas indisposer des oreilles délicates[51](**)), les intuitions et les constructions "géométriques" les plus essentielles[52](*), familières pour les bons vieux espaces d'an- P 41
tan, peuvent se transposer de façon plus ou moins évidente. Autrement dit, on dispose pour les nouveaux objets de toute la riche gamme des images et associations mentales, des notions et de certaines au moins de techniques, qui précédemment restaient restreintes aux objets ancien style.

Et secundo, la nouvelle notion est en même temps *assez vaste* pour englober une foule de situations qui, jusque là, n'étaient pas considérées comme donnant lieu à des intuitions de nature "topologico-géométrique" — aux intuitions, justement, qu'on avait réservées par le passé aux seuls espaces topologiques ordinaires (et pour cause...).

La chose cruciale ici, dans l'optique des conjectures de Weil, c'est que la nouvelle notion est asses vaste en effet, pour nous permettre d'associer à tout "schéma" un tel "espace généralisé" ou "topos" (appelé le "topos étale" du schéma envisagé). Certains "invariants cohomologiques" de ce topos (tout ce qu'il y a de "bébêtes" !) semblaient alors avoir une bonne chance de fournir "ce dont on avait besoin" pour donner tout leur sens à ces conjectures, et (qui sait !) de fournir peut-être les moyens de les démontrer.

C'est dans ces pages que je suis en train d'écrire que, pour la première fois dans ma vie de mathématicien, je prends la loisir d'évoquer (ne serait-ce qu'à moi-même) l'ensemble des maître-thèmes et des grandes idées directrices dans mon œuvre mathématique. Cela m'amène à mieux apprécier la place et la portée de chacun de ces thèmes, et des "points de vue" qu'ils incarnent, dans la grande vision géométrique qui les unit et dont ils sont issus. C'est par ce travail que sont apparues en pleine lumière les deux idées novatrices névralgiques dans le premier et puissant essor de la géométrie nouvelle : l'idée des *schémas*, et celle des *topos*.

C'est la deuxième de ces idées, celle des topos, qui à présent m'apparaît comme la plus profonde P 42
des deux. Si d'aventure, vers la fin des années cinquante, je n'avais *pas* retroussé més manches, pour développer obstinément jour après jour, tout au long de douze longues années, un "outil schématique" d'une délicatesse et d'une puissance parfaites — il me semblerait quasiment impensable pourtant que dans les dix ou vingt ans déjà qui ont suivi, d'autres que moi auraient pu à la longue s'empêcher d'introduire à la fin des fins (fut-ce à leur corps défendant...) la notion qui visiblement s'imposait, et de dresser tant bien que mal tout au moins quelques vétustes baraquements en "préfab", à défaut des spacieuses et confortables demeures que j'ai eu à cœur d'assembler pierre par pierre et de monter de mes mains. Par contre, je ne vois personne d'autre sur la scène

[51](**) Le nom "topos" a été choisi (en association avec celui de "topologie", ou "topologique") pour suggérer qu'il s'agit de "l'objet par excellence" auquel s'applique l'intuition topologique. Par le riche nuage d'images mentales que ce nom suscite, il faut le considérer comme étant plus ou moins l'équivalent du terme "espace" (topologique), avec simplement une insistance plus grande sur la spécifité "topologique" de la notion. (Ainsi, il y a des "espaces vectoriels", mais pas de "topos vectoriels" jusqu'à nouvel ordre !) Il s'impose de garder les deux expressions conjointement, chacune avec sa spécifité propre.

[52](*) Parmi ces "constructions", il y a notamment celle de tous les "invariants topologiques" familiers, y compris les invariants cohomologiques. Pour ces derniers, j'avais fait tout ce qu'il fallait dans l'article déjà cité ("Tohoku" 1955), pour pouvoir leur donner un sens pour tout "topos".

mathématique, au cours des trois décennies écoulées, qui aurait pu avoir cette naïveté, ou cette innocence, de faire (à ma place) cet *autre* pas crucial entre tous, introduisant l'idée si enfantine des topos (ou ne serait-ce que celle des "sites"). Et, à supposer même cette idée-là déjà gracieusement fournie, et avec elle la timide promesse quelle semblait receler — je ne vois personne d'autre, que ce soit parmi mes amis d'antan ou parmi mes élèves, qui aurait eu le souffle, et surtout la *foi*, pour mener à terme cette humble idée[53](*) (si dérisoire en apparence, alors que le but semblait infiniment lointain…) : depuis ses premiers débuts balbutiants, jusqu'à la pleine maturité de la "maîtrise de la cohomologie étale", en quoi elle a fini par s'incarner entre mes mains, au cours des années qui ont suivi.

15 **15**. Oui, la rivière est profonde, et vastes et paisibles sont les eaux de mon enfance, dans un royaume que j'ai crû quitter il y a longtemps. Tous les chevaux du roi y pourraient boire ensemble à l'aise et tout leur saoûl, sans les épuiser ! Elles viennent des glaciers, ardentes comme ces neiges lointaines, et elles ont la douceur de la glaise des plaines. Je viens de parler d'un de ces chevaux, qu'un enfant avait amené boire et qui a bu son content, longuement. Et j'en ai vu un
P 43 autre venant boire un moment, sur les traces du même gamin si ça se trouve — mais là ça n'a pas traîné. Quelqu'un a dû le chasser. Et c'est tout, autant dire. Je vois pourtant des troupeaux innombrables de chevaux assoiffés qui errent dans la plaine — et pas plus tard que ce matin même leurs hennissements m'ont tiré du lit, à une heure indue, moi qui vais sur mes soixante ans et qui aime la tranquillité. Il n'y a rien eu à faire, il a fallu que je me lève. Ça me fait peine de les voir, à l'état de rosses efflanquées, alors que la bonne eau pourtant ne manque pas, ni les verts pâturages. Mais on dirait qu'un sortilège malveillant a été jeté sur cette contrée que j'avais connue accueillante, et condamné l'accès à ces eaux généreuses. Ou peut-être est-ce un coup monté par les maquignons du pays, pour faire tomber les prix qui sait ? Ou c'est un pays peut-être où il n'y a plus d'enfants pour mener boire les chevaux, et où les chevaux ont soif, faute d'un gamin qui retrouve le chemin qui mène à la rivière…

16 **16**. Le thème du topos est issu de celui des schémas, l'année même où sont apparus les schémas — mais en étendue il dépasse largement le thème-mère. C'est le thème du topos, et non celui des schémas, qui est ce "lit", ou cette "rivière profonde", où viennent s'épouser la géométrie et l'algèbre, la topologie et l'arithmétique, la logique mathématique et la théorie des catégories, le monde du continu et celui des structures "discontinues" ou "discrètes". Si le thème des schémas est comme le *cœur* de la géométrie nouvelle, le thème du topos en est l'enveloppe, ou la *demeure*. Il est ce que j'ai conçu de plus vaste, pour saisir avec finesse, par un même langage riche an résonances géométriques, une "essence" commune à des situations des plus éloignées les unes des autres, provenant de telle région ou de telle autre du vaste univers des choses mathématiques.

Ce thème du topos est très loin pourtant d'avoir connu la fortune de celui des schémas. Je m'exprime à ce sujet an diverses occasions dans Récoltes et Semailles, et ce n'est pas le lieu ici de m'attarder sur les vicissitudes étranges qui ont frappé cette notion. Deux des maîtres-thèmes de la géométrie nouvelle sont pourtant issus de celui du topos, deux "théories cohomologiques" complémentaires, conçues l'une et l'autre aux fins de fournir une approche vers les conjectures de Weil : le *thème étale* (ou *"ℓ-adique"*), et le *thème cristallin*. Le premier s'est concrétisé entre mes mains en l'outil cohomologique ℓ-adique, qui dès à présent apparaît comme un des plus puissants outils mathématiques du siècle. Quant au thème cristallin, réduit après mon départ à une existence quasi-occulte, il a finalement été exhumé (sous la pression des besoins) en juin 1981, sous les feux

[53](*) (A l'intention du lecteur mathématicien.) Quand je parle de "mener à terme cette humble idée", il s'agit de l'idée de la cohomologie étale comme approche vers les conjectures de Weil. C'est inspiré par ce propos que j'avais découvert la notion de site en 1958, et que cette notion (ou la notion très voisine de topos), et le formalisme cohomologique étale, ont été développé entre 1962 et 1966 sous mon impulsion (avec l'assistance de quelques collaborateurs dont il sera question en lieu).

Quand je parle de "souffle" et de "foi", il s'agit là des qualités de nature "non-technique", et qui ici m'apparaissent bien comme les qualités essentielles. A un autre niveau, je pourrais y ajouter aussi ce que j'appellerais le "flair cohomologique", c'est-à-dire le genre de flair qui s'était développé en moi pour l'édification des théories cohomologiques. J'avais cru le communiquer à mes élèves cohomologistes. Avec un recul de dix-sept ans après mon départ du monde mathématique, je constate qu'il ne s'est conservé en aucun d'eux.

de la rampe et sous un nom d'emprunt, dans des circonstances plus étranges encore que celles autour des topos.

L'outil cohomologique ℓ-adique a été, comme prévu, l'outil essentiel pour établir les conjectures de Weil. J'en ai démontré moi-même un bon paquet, et le dernier pas a été accompli avec maestria, trois ans après mon départ, par Pierre Deligne, le plus brillant de mes élèves "cohomologistes". P 44

J'avais d'ailleurs dégagé, vers l'année 1968, une version plus forte et surtout, plus "géométrique" des conjectures de Weil. Celles-ci restaient "entachées" (si on peut dire!) d'un aspect "arithmétique" apparemment irréductible, alors pourtant que l'esprit même de ces conjectures est d'exprimer et de saisir "l'arithmétique" (ou "le discret") par la médiation du "géométrique" (ou du "continu")[54](*). En ce sens, la version des conjectures que j'avais dégagée me paraît plus "fidèle" que celle de Weil lui-même à la "philosophie de Weil" — à cette philosophie non écrite et rarement dite, qui a été peut-être *la* principale motivation tacite dans l'extraordinaire essor de la géométrie au cours des quatre décennies écoulées[55](**). Ma reformulation a consisté, pour l'essentiel, à dégager une sorte de "quintessence" de ce qui devait rester valable, dans le cadre des variétés algébriques dites "abstraites", de la classique "théorie de Hodge", valable pour les variétés algébriques "ordinaires"[56](***). J'ai appelé *"conjectures standard"* (pour les cycles algébriques) cette nouvelle version, entièrement géométrique, des fameuses conjectures.

Dans mon esprit, c'était là un nouveau pas, après le développement de l'outil cohomologique ℓ-adique, en direction de ces conjectures. Mais en même temps et surtout, c'était aussi un des principes d'approche possibles vers ce qui m'apparaît encore comme le thème le plus profond que j'aie introduit en mathématique[57](*) : celui des *motifs* (lui-même né du "thème cohomologique ℓ-adique"). Ce thème est comme le *cœur* ou l'âme, la partie la plus cachée, la mieux dérobée au regard, du thème schématique, qui lui-même est au cœur de la vision nouvelle. Et les quelques phénomènes-clef dégages dans les conjectures standard[58](**) peuvent être vus comme formant une sorte de quintessence ultime du thème motivique, comme le *"souffle"* vital de ce thème subtil entre tous, de ce *"cœur dans le cœur"* de la géométrie nouvelle. P 45

Voici en gros de quoi il s'agit. Nous avons vu, pour un nombre premier p donné, l'importance (en vue notamment des conjectures de Weil) de savoir construire des "théories cohomologiques" pour les "variétés (algébriques) de caractéristique p". Or, le fameux "outil cohomologique ℓ-adique" fournit justement une telle théorie, et même une *infinité de théories cohomologiques différentes*, à savoir une associée à tout nombre premier ℓ différent de la caractéristique p. Il y a là encore visiblement, une "théorie qui manque", qui correspondrait au cas d'un ℓ qui serait égal à p. Pour y pourvoir, j'ai imaginé tout exprès une autre théorie cohomologique encore (à laquelle il a été déjà fait allusion tantôt), dite "cohomologie cristalline". D'ailleurs, dans le cas important où p est infini, on dispose de trois autres théories cohomologiques encore[59](***) — et rien ne prouve qu'on ne sera conduit, tôt ou tard, à introduire encore de nouvelles théories cohomologiques, ayant

[54](*) (A l'intention du mathématicien) Les conjectures de Weil sont subordonnées à des hypothèses de nature "arithmétique", du fait notamment que les variétés envisagées doivent être définies sur un corps *fini*. Du point de vue du formalisme cohomologique, cela conduit à donner une place à part à *l'endomorphisme de Frobenius* associé à une telle situation. Dans mon approche, les propriétés cruciales (type "théorème de l'index généralisé") concernent les correspondances algébriques *quelconques*, et ne font aucune hypothèse de nature arithmétique sur un corps de base préalablement donné.

[55](**) Il y a eu cependant, après mon départ en 1970, un mouvement de réaction très nette, lequel s'est concrétisé par une situation de stagnation relative, que j'ai occasion plus d'une fois d'évoquer dans les lignes de Récoltes et Semailles.

[56](***) "Ordinaire" signifie ici : "définie sur le corps des complexes". La théorie de Hodge (dite "des intégrales harmoniques") était la plus puissante des théories cohomologiques connues dans le contexte des variétés algébriques complexes.

[57](*) C'est le thème le plus profond, tout au moins dans la période "publique" de mon activité de mathématicien, entre 1950 et 1969, c'est-à-dire jusqu'au moment de mon départ de la scène mathématique. Je considère le thème de la géométrie algébrique anabélienne et de la théorie de Galois–Teichmüller, développé à partir de 1977, comme étant d'une profondeur comparable,

[58](**) (A l'intention du lecteur géomètre algébriste) Il y a lieu, éventuellement, de reformuler ces conjectures. Pour des commentaires plus circonstanciés, voir "Le tour des chantiers" (ReS IV note n° 178, p. 1215–1216) et la note de b. de p. p. 769 dans "Conviction et connaissance" (ReS III, note n° 162).

[59](***) (A l'intention du lecteur mathématicien) Ces théories correspondent respectivement à la *cohomologie de Betti* (définie par voie transcendante, à l'aide d'un plongement du corps de base dans le corps des complexes), à

des propriétés formelles toutes analogues. Contrairement à ce qui se passait en topologie ordinaire, on se trouve donc placé là devant une abondance déconcertante de théories cohomologiques différentes. On avait l'impression très nette qu'en un sens qui restait d'abord assez flou, toutes ces théories devaient "revenir au même", qu'elles "donnaient les mèmes résultats"[60](****). C'est
P 46 pour parvenir à exprimer cette intuition de "parenté" entre théories cohomologiques différentes, que j'ai dégagé la notion de *"motif"* associé à une variété algébrique. Par ce terme, j'entends suggérer qu'il s'agit du "motif commun" (ou de la *"raison* commune") sous-jacent à cette multitude d'invariants cohomologiques différents associés à là variété, à l'aide de la multitude des toutes les théories cohomologiques possibles a priori. Ces différentes théories cohomologiques seraient comme autant de développements thématiques différents, chacun dans le "tempo", dans la "clef" et dans le "mode" ("majeur" ou "mineur") qui lui est propre, d'un même "motif de base" (appelé "théorie cohomologique *motivique"*), lequel serait en même temps la plus fondamentale, ou la plus "fine", de toutes ces "incarnations" thématiques différentes (c'est-à-dire, de toutes ces théories cohomologiques possibles). Ainsi, le motif associé à une variété algébrique constituerait l'invariant cohomologique "ultime", "par excellence", dont tous les autres (associés aux différentes théories cohomologiques possibles) se déduiraient, comme autant d'"incarnations" musicales, ou de "réalisations" différentes. Toutes les propriétés essentielles de *"la* cohomologie" de la variété se "liraient" (ou s'"entendraient") déjà sur le motif correspondant, de sorte que les propriétés et structures familières sur les invariants cohomologiques particularisés (ℓ-adiques ou cristallins, par exemple), seraient simplement le fidèle reflet des propriétés et structures *internes au motif*[61](*).

P 47 C'est là, exprimé dans le langage non technique d'une métaphore musicale, la quintessence d'une idée d'une simplicité enfantine encore, délicate et audacieuse à là fois. J'ai développé cette idée, en marge des tâches de fondements que je considérais plus urgentes, sous le nom de "théorie des motifs" ou de "philosophie (ou "yoga") des motifs", tout au long des années 1963–69. C'est une théorie d'une richesse structurale fascinante, dont une grande partie est restée encore conjec-

---

la *cohomologie de Hodge* (définie par Serre) et à la *cohomologie de De Rham* (définie par moi), ces deux dernières remontant déjà aux années cinquante (et celle de Betti, au siècle dernier).

[60](****) (A l'intention du lecteur mathématicien) Par exemple, si f est un endomorphisme de la variété algébrique X, induisant un endomorphisme de l'espace de cohomologie $H^i(X)$, le "polynôme caractéristique" de ce dernier devait être à coefficients *entiers*, ne dépendant pas de la théorie cohomologique particulière choisie (par exemple ℓ-adique, pour ℓ variable). Itou pour des correspondances algébriques générales, quand X est supposée propre et lisse. La triste vérité (et qui donne une idée de l'état de lamentable abandon de la théorie cohomologique des variétés algébriques en caracteristique $p > 0$, depuis mon départ), c'est que la chose n'est toujours pas démontrée à l'heure actuelle, même dans le cas particulier où X est une *surface* projective et lisse et $i = 2$. En fait, à ma connaissance, personne après mon départ n'a encore daigné s'intéresser à cette question cruciale, typique de celles qui apparaissent comme subordonnées aux conjectures standard. Le décret de la mode, c'est qué le seul endomorphisme digne d'attention est l'endomorphisme de Frobenius (lequel a pu être traité à part par Deligne, par les moyens du bord...).

[61](*) (A l'intention du lecteur mathématicien) Une autre façon de voir la catégorie des motifs sur un corps k, c'est de la visualiser comme une sorte de "catégorie abéllenne enveloppante" de la catégorie des schémas séparés de type fini sur k. Le motif associé à un tel schéma X (ou "cohomologie motivique de X", que je note $H^*_{mot}(X)$) apparaît ainsi comme une sorte de "avatar" abélianisé de X. La chose cruciale ici, c'est que, tout comme une variété algébrique X est susceptible de "variation continue" (sa classe d'isomorphie dépend donc de "paramètres" continus, ou "modules"), le motif associé à X, ou plus généralement, un motif "variable", est lui aussi susceptible de variation continue. C'est là un aspect de la cohomologie motivique, qui est en contraste frappant avec ce qui se passe pour tous les invariants cohomologiques classiques, y compris les invariants ℓ-adiques, à la seule exception de la cohomologie de Hodge des variétés algébriques complexés.

Ceci donne une idée à quel point là "cohomologie motivique" est un invariant plus fin, cernant de façon beaucoup plus serrée la "forme arithmétique" (si j'ose hasarder cette expression) de X, que les invariants purement topologiques traditionnels. Dans ma vision des motifs, ceux-ci constituent une sorte de "cordon" très caché et très délicat, reliant les propriétés algébro-géométriques d'une variété algébrique, à des propriétés de nature "arithmétique" incarnées par son motif. Ce dernier peut être considéré comme un objet de nature "géométrique" dans son esprit même, mais où les propriétés "arithmétiques" surbordonnées à la géométrie se trouvent, pour ainsi dire, "mises à nu".

Ainsi, le motif m'apparaît comme le plus profond "invariant de la forme" qu'on a su associer jusqu'à présent à une variété algébrique, mis à part son "groupe fondamental motivique". L'un et l'autre invariant représentent pour moi comme les "ombres" d'un "type d'homotopie motivique" qui resterait à décrire (et aur lequel je dis quelques mots en passant dans la note "Le tour des chantiers — ou outils et vision" (ReS IV, n° 178, voir chantier 5 (Motifs), et notamment page 1214)). C'est ce dernier objet qui me semble devoir être l'incarnation la plus parfaite de l'élusive intuition de "forme arithmétique" (ou "motivique") d'une variété algébrique quelconque.

turale[62](*).

Je m'exprime à diverses reprises, dans Récoltes et Semailles au sujet de ce "yoga des motifs", qui me tient particulièrement à cœur. Ce n'est pas le lieu de revenir ici sur ce que j'en dis ailleurs. Qu'il me suffise de dire que les "conjectures standard" découlent le plus naturellement du monde de ce yoga des motifs. En même temps elles fournissent un principe d'approche pour une des constructions en forme possibles de la notion de motif.

Ces conjectures m'apparaissaient, et m'apparaissent aujourd'hui encore, comme l'une des deux questions les plus fondamentales qui se posent en géométrie algébrique. Ni cette question, ni l'autre question toute aussi cruciale (celle dite de la "résolution des singularités") n'est encore résolue à l'heure actuelle. Mais alors que la deuxième de ces questions apparaît, aujourd'hui comme il y a cent ans, comme une question prestigieuse et redoutable, celle que j'ai eu l'honneur de dégager P 48
s'est vue classer par les péremptoires décrets de la mode (dès les années qui ont suivi mon départ de la scène mathématique, et tout comme le thème motivique lui-même[63](*)) comme aimable fumisterie grothendieckienne. Mais encore une fois j'anticipe...

17. A vrai dire, mes réflexions sur les conjectures de Weil elles-mêmes, en vue de les établir, sont *17*
restées sporadiques. Le panorama qui avait commencé à s'ouvrir devant moi et que je m'efforçais de scruter et de capter, dépassait de très loin en ampleur et en profondeur les hypothétiques besoins d'une démonstration, et même tout ce que ces fameuses conjectures avaient pu d'abord faire entrevoir. Avec l'apparition du thème schématique et de celui des topos, c'est un monde nouveau et insoupçonné qui s'était ouvert soudain. "Les conjectures" y occupaient une place centrale, certes, un peu comme le ferait la capitale d'un vaste empire ou continent, aux provinces innombrables, mais dont la plupart n'ont que des rapports des plus lointains avec ce lieu brillant et prestigieux. Sans avoir eu à me le dire jamais, je me savais le serviteur désormais d'une grande tâche : explorer ce monde immense et inconnu, appréhender ses contours jusqu'aux frontières les plus lointaines; et aussi, parcourir en tous sens et inventorier avec un soin tenace et méthodique les provinces les plus proches et les plus accessibles, et en dresser des cartes d'une fidélité et d'une précision scrupuleuse, où le moindre hameau et la moindre chaumière auraient leur place...

C'est ce dernier travail surtout qui absorbait le plus gros de mon énergie — un patient et vaste travail de fondements que j'étais le seul à voir clairement et, surtout, à "sentir par les tripes". C'est lui qui a pris, et de loin, la plus grosse part de mon temps, entre 1958 (l'année où sont apparus, coup sur coup, le thème schématique et celui des topos) et 1970 (l'année de mon départ de la scène mathématique).

Souvent d'ailleurs je rongeais mon frein d'être retenu ainsi, comme par un poids tenace et collant, avec ces interminables tâches qui (une fois vu l'essentiel) s'apparentaient plus pour moi à "de l'intendance", qu'à une lancée dans l'inconnu. Constamment je devais retenir cette pulsion de m'élancer de l'avant — celle du pionnier ou de l'explorateur, parti à la découverte et à l'ex- P 49
ploration de mondes inconnus et sans nom, m'appelant sans cesse pour que je les connaisse et les nomme. Cette pulsion-là, et l'énergie que j'y investissais (comme à la dérobée, quasiment!), étaient constamment à la portion congrue.

Pourtant, je savais bien au fond que c'était cette énergie-là, dérobée (pour ainsi dire) à celle que je dévais à mes "tâches", qui était de l'essence la plus rare et la plus déliée — que la "création" dans mon travail de mathématicien, c'était avant tout *là* qu'elle se plaçait : dans cette attention intense pour appréhender, dans les replis obscurs, informes et moites d'une chaude et inépuisable matrice nourricière, les premières traces de forme et de contours de ce qui n'était pas né encore et

[62](*) J'ai expliqué ma vision des motifs à qui voulait l'entendre, tout au long de ces années, sans prendre la peine de rien publier à ce sujet noir sur blanc (ne manquant pas d'autres tâches au service de tous). Cela a permis plus tard à certains de mes élèves de piller plus à l'aise, sous l'œil attendri de l'ensemble de mes anciens amis, bien au courant de la situation. (Voir note de b. de p. qui suit.)

[63](*) En fait, ce thème a été exhumé en 1982 (un an après le thème cristallin), sous son nom d'origine cette fois (et sous une forme étriquée, dans le seul cas d'un corps de base de caractéristique nulle), sans que le nom de l'ouvrier ne soit prononcé. C'est là un exemple parmi un nombre d'autres, d'une notion ou d'un thème enterré aux lendemains de mon départ comme des fantasmagories grothendieckiennes, pour être exhumes l'un après l'autre par certains de mes élèves au cours des dix ou quinze années suivantes, avec une fierté modeste et (est-il besoin encore de le préciser) sans mention de l'ouvrier...

qui semblait m'appeler, pour prendre forme et s'incarner et naître... Dans le travail de découverte, cette attention intense, cette sollicitude ardente sont une force essentielle, tout comme la chaleur du soleil pour l'obscure gestation des semences enfouies dans la terre nourricière, et pour leur humble et miraculeuse éclosion à la lumière du jour.

Dans mon travail de mathématicien, je vois à l'œuvre surtout ces deux forces ou pulsions, également profondes, de nature (me semble-t-il) différentes. Pour évoquer l'une et l'autre, j'ai utilisé l'image du *bâtisseur*, et celle du *pionnier* ou de l'explorateur. Mises côte-à-côte, l'une et l'autre me frappent soudain comme vraiment très "yang", très "masculines", voire "macho" ! Elles ont la résonance altière du mythe, ou celle des "grandes occasions". Sûrement elles sont inspirées par les vestiges, en moi, de mon ancienne vision "héroïque" du travail créateur, la vision super-yang. Telles quelles, elles donnent une vision fortement teintée, pour ne pas dire figée, "au garde à vous", d'une réalité bien plus fluide, plus humble, plus "simple" — d'une réalité *vivante*.

Dans cette mâle pulsion du "bâtisseur", qui semble sans cesse me pousser vers de nouveaux chantiers, je discerne bien pourtant, en même temps, celle du *casanier* : de celui profondément attaché à *"la"* maison. Avant toute autre chose, c'est *"sa"* maison, celle des *"proches"* — le lieu d'une intime entité vivante dont il se sent faire partie. Ensuite seulement, et à mesure que s'élargit le cercle de ce qui est ressenti comme "proche", est-elle aussi une "maison pour tous". Et dans cette pulsion de "faire des maisons" (comme on "ferait" l'amour...) il y a aussi et avant tout une *tendresse.* Il y a la pulsion du *contact* avec ces matériaux qu'un façonne un à un, avec un soin amoureux, et qu'un ne connaît vraiment que par ce contact aimant. Et, une fois montés les murs
P 50 et posés les poutres et le toit, il y a la satisfaction profonde à installer une pièce après l'autre, et à voir peu à peu s'instaurer, parmi ces salles, ces chambres et ces réduits l'ordre harmonieux de la maison vivante — belle, accueillante, bonne pour y vivre. Car *la maison*, avant tout et secrètement en chacun de nous, c'est aussi *la mère* — ce qui nous entoure et nous abrite, à la fois refuge et réconfort ; et peut-être (plus profondément encore, et alors même que nous serions en train de la construire de toutes pièces) c'est cela aussi dont nous sommes nous-mêmes issus, ce qui nous a abrité et nourri, en ces temps à jamais oubliés d'avant notre naissance... C'est aussi *le Giron.*

Et l'image apparue spontanément tantôt, pour aller au delà de l'appellation prestigieuse de "pionnier", et pour cerner la réalité plus cachée qu'elle recouvrait, était elle aussi dépouillée de tout accent "héroïque". Là encore, c'était l'image archétype du maternel qui est apparue — celle de la "matrice" nourricière et de ses informes et obscurs labeurs...

Ces deux pulsions qui m'apparaissaient comme "de nature différente" sont finalement plus proches que je ne l'aurais pensé. L'une et l'autre sont dans la nature d'une *"pulsion de contact"*, nous portant à la rencontre de *"la Mère"* : de Celle qui incarne *et* ce qui est proche, "connu", *et* ce qui est "inconnu". M'abandonner à l'une ou l'autre pulsion, c'est *"retrouver la Mère"*. C'est renouveler le contact à la fois au *proche*, au "plus ou moins connu", et au *"lointain"*, à ce qui est "inconnu" mais en même temps pressenti, sur le point de se faire connaître.

La différence ici est de tonalité, de dosage, non de nature. Quand je "bâtis des maisons", c'est le "connu" qui domine, et quand "j'explore", c'est l'inconnu. Ces deux "modes" de découverte, ou pour mieux dire, ces deux aspects d'un même processus ou d'un même travail, sont indissolublement liés. Ils sont essentiels l'un et l'autre, et complémentaires. Dans mon travail mathématique, je discerne un mouvement de va-et-vient constant entre ces deux modes d'approche, ou plutôt, entre les moments (ou les périodes) où l'un prédomine, et ceux où prédomine l'autre[64](*). Mais
P 51 il est clair aussi qu'en chaque moment, et l'un et l'autre mode est présent. Quand je construis, aménage, ou que je déblaie, nettoie, ordonne, c'est le "mode" ou le "versant" "yang", ou "masculin" du travail qui donne le ton. Quand j'explore à tâtons l'insaisissable, l'informe, ce qui est sans nom, je suis le versant "ying", ou "féminin" de mon être.

[64](*) Ce que je dis ici sur le travail mathématique est vrai également pour le travail de "méditation" (dont il sera question un peu partout dans Récoltes et Semailles). Il n'y a guère de doute pour moi que c'est là une chose qui apparaît dans tout travail de découverte, y compris dans celui de l'artiste (écrivain ou poète, disons). Les deux "versants" que je décris ici peuvent être vus également comme étant, l'un celui de *l'expression* et de ses exigences "techniques", l'autre celui de la *réception* (de perceptions et d'impressions de toutes sortes), devenant *inspiration* par l'effet d'une attention intense. L'un et l'autre sont présents en tout moment du travail, et il y a ce mouvement constant de "va-et-vient" entre les "temps" où l'un prédomine, et ceux où prédomine l'autre.

Il n'est pas question pour moi de vouloir minimiser ou renier l'un ou l'autre versant de ma nature, essentiels l'un et l'autre — le "masculin" qui construit et qui engendre, et le "féminin" qui conçoit, et qui abrite les lentes et obscures gestations. Je "suis" l'un et l'autre — "yang" et "yin", "homme" et "femme". Mais je sais aussi que l'essence la plus délicate, la plus déliée dans les processus créateurs se trouve du côté du versant "yin", "féminin" — le versant humble, obscur, et souvent de piètre apparence.

C'est ce versant-là du travail qui, depuis toujours je crois, a exercé sur moi la fascination la plus puissante. Les consensus en vigueur m'encourageaient pourtant à investir le plus clair de mon énergie dans l'autre versant, dans celui qui s'incarne et s'affirme dans des "produits" tangibles, pour ne pas dire finis et achevés — des produits aux contours bien tranchés, attestant de leur réalité avec l'évidence de la pierre taillée...

Je vois bien, avec le recul, comment ces consensus ont pesé sur moi, et aussi comment j'ai "accusé le poids" — en souplesse ! La partie "conception" ou "exploration" de mon travail était maintenue à la portion congrue jusqu'au moment encore de mon départ, soit. Et pourtant, dans ce coup d'œil rétrospectif sur ce que fut mon œuvre de mathématicien, il ressort avec une évidence saisissante que ce qui fait l'essence et la puissance de cette œuvre, c'est bien ce versant de nos jours négligé, quand il n'est objet de dérision ou d'un condescendant dédain : celui des *"idées"*, voire celui du *"rêve"*, nullement celui des "résultats". Essayant dans ces pages de cerner ce que j'ai apporté de plus essentiel à là mathématique de mon temps, par un regard qui embrasse une forêt, plutôt que de s'attarder sur des arbres — j'ai vu, non un palmarès de "grands théorèmes", mais un vivant éventail d'idées fécondes[65](*), venant concourir toutes à une même et vaste vision.

18. Quand cet "avant-propos" a commencé à tourner à la promenade à travers mon œuvre de mathématicien, avec mon petit topo sur les "héritiers" (bon teint) et sur les "bâtisseurs" (incorrigibles), a commencé aussi à apparaître un *nom* pour cet avant-propos manqué : ce serait "L'enfant et le bâtisseur". Au cours des jours suivants, il devenait de plus en plus clair que "l'enfant" et "le bâtisseur" étaient un seul et même personnage. Ce nom est donc devenu, plus simplement, "L'enfant bâtisseur". Un nom, ma foi, qui ne manquait pas d'allure, et tout fait pour me plaire ! P 52 *18*

Mais voilà que la réflexion fait apparaître que cet altier "bâtisseur", ou (plus modestement) l'enfant-qui-joue-à-faire-des-maisons, ce n'était qu'un des visages du fameux enfant-qui-joue, lequel en avait *deux.* Il y a aussi l'enfant-qui-aime-à-explorer-les-choses, à aller fouiner et s'enfouir dans les sables ou dans les vases boueuses et sans nom, les endroits les plus impossibles et les plus saugrenus... Pour donner le change sans doute (ne serait-ce qu'à moi-même...), j'ai commencé par l'introduire sous le nom flamboyant de "pionnier", suivi de celui, plus terre-à-terre mais encore auréolé de prestige, d'"explorateur". C'était à se demander, entre le "bâtisseur" et le "pionnier-explorateur", lequel était le plus mâle, le plus alléchant des deux ! Pile ou face ?

Et puis, en y regardant d'un peu plus près, voilà notre intrépide "pionnier" qui se trouve finalement être une *fille* (qu'il m'avait plu d'habiller en garçon) — une sœur des mares, de la pluie, des brumes et de la nuit, silencieuse et quasiment invisible à force de s'effacer dans l'ombre — celle que toujours on oublie (quand on ne fait mine de se gausser d'elle...). Et j'ai bien trouvé moyen moi aussi, pendant des jours et des jours, de l'oublier — de l'oublier doublement, pourrais-je dire : je n'avais voulu voir d'abord que le garçon (celui qui joue à faire des maisons...) — et même quand je n'ai pu m'empêcher, à force, de voir quand même *l'autre*, je l'ai vue encore en garçon, elle aussi...

[65](*) Ce n'est pas que ce qu'on peut appeler les "grands théorèmes" manquent dans mon œuvre, y compris des théorèmes qui résolvent des questions posées par d'autres que moi, que personne avant moi n'avait su résoudre. (J'en passe en revue certains dans la note de b. de p. ??(***) page 554 ⟨**??**⟩, de la note "La mer qui monte..." (ReS III, n° 122).) Mais, comme je l'ai souligne déjà dès les débuts de cette "promenade" (dans l'étape "Points de vue et vision", n° 6), ces théorèmes ne prennent pour moi tout leur sens que par le contexte nourricier d'un grand thème, initié par une de ces "idées fécondés". Leur démonstration dès lors découle, comme de source et sans effort, de la nature même, de la "profondeur" du thème qui les porte — comme les vagues du fleuve semblent naître en douceur de la profondeur même de ses eaux, sans rupture et sans effort. Je m'exprime dans un sens tout analogue, mais avec d'autres images, dans la note déjà citée "La mer qui monte...".

Pour ce qui est du beau nom pour ma promenade, du coup il ne tient plus du tout. C'est un nom tout-en-yang, tout "macho", un nom-qui-boite. Pour le faire tenir pas de guingois, il faudrait
P 53 y faire figurer *l'autre* également. Mais, chose étrange, *"l'autre" n'a pas vraiment de nom.* Le seul qui colle tant soit peu, c'est "explorateur", mais c'est encore un nom de garçon, rien à faire. La langue ici est une garce, elle nous piège sans même qu'on s'en rende compte, visiblement de mèche avec des préjugés ancestraux.

On pourrait s'en tirer peut-être avec "L'enfant-qui-bâtit et l'enfant-qui-explore". En laissant non-dit que l'un est "garçon" et l'autre est "fille", et que c'est un seul et même enfant garçon-fille qui, en bâtissant explore, et en explorant, bâtit... Mais hier, en plus du double versant yin-yang de ce qui contemple et explore, et de ce qui nomme et construit, était apparu un autre aspect encore des choses.

L'Univers, le Monde, voire le Cosmos, sont choses étrangères au fond et très lointaines. Elles ne nous concernent pas vraiment. Ce n'est pas vers *eux* qu'au plus profond de nous-même nous porte la pulsion de connaissance. Ce qui nous attire, c'est leur *Incarnation* tangible et immédiate, la plus proche, la plus "charnelle", chargée en résonances profondes et riche en mystère — Celle qui se confond avec les origines de notre être de chair, comme avec celles de notre espèce — et Celle aussi qui de tout temps nous attend, silencieuse et prête à nous accueillir, "à l'autre bout du chemin". C'est d'*Elle*, la Mère, de Celle qui nous a enfanté comme elle a enfanté le Monde, que sourd la pulsion et que s'élancent les chemins du désir — et c'est à *Sa* rencontre qu'ils nous portent, vers *Elle* qu'ils s'élancent, pour retourner sans cesse et s'abîmer en Elle.

Ainsi, au détour du chemin d'une "promenade" imprévue, je retrouve à i'improviste une parabole qui me fût familière, et que j'avais un peu oubliée — la parabole de *l'enfant et la Mère.* On peut la voir comme une parabole pour *"La Vie, à la quête d'elle-même"*. Ou, au niveau plus humble de l'existence individuelle, une parabole pour *"l'être, à la quête des choses".*

C'est une parabole, et c'est aussi l'expression d'une expérience ancestrale, profondément implantée dans la psyché — le plus puissant parmi les symboles originels qui nourrissent les couches créatrices profondes. Je crois y reconnaître, exprimé dans le langage immémorial des images archétypes, le souffle même du pouvoir créateur en l'homme, animant sa chair et son esprit, dans ses manifestations les plus humbles et les plus éphémères, comme les plus éclatantes et les plus durables.

Ce "souffle", tout comme l'image charnelle qui l'incarne, est la chose au monde la plus humble. C'est aussi la chose la plus fragile, et la plus ignorée de tous et la plus méprisee...

P 54 Et l'histoire des vicissitudes de ce soufflé-là au cours de ton existence n'est autre que *ton* aventure, l'"aventure de connaissance" dans *ta* vie. La parabole sans paroles qui l'exprime est celui de l'enfant et la Mère.

Tu es l'enfant, issu de la Mère, abrité en Elle, nourri de Sa puissance. Et l'enfant s'élance de la Mère, la Toute-proche, la Bien-connue — à la rencontre de la Mère, l'Illimitée, à jamais Inconnue et pleine de mystère...

Fin de la "Promenade à travers une œuvre"

Epilogue : *les Cercles invisibles*

19 **19**. Jusqu'à l'apparition du point de vue des topos, vers la fin des années cinquante, l'évolution de la notion d'espace m'apparaît comme une évolution essentiellement *"continue"*. Elle paraît se poursuivre sans heurts ni sauts, à partir de la théorisation euclidienne de l'espace qui nous entoure, et de la géométrie léguée par les grecs, s'attachant à l'étude de certaines "figures" (droites, plans, cercles, triangles etc) vivant dans cet espace. Certes, des changements profonds ont eu lieu dans la façon dont le mathématicien ou le "philosophe de la nature" concevait "l'espace"[66](*). Mais ces changements me semblent tous dans la nature d'une "continuité" essentielle — ils n'ont jamais

[66](*) Mon propos initial, en écrivant l'Epilogue, avait été d'inclure une esquisse très sommaire de certains de ces "changements profonds", et faire apparaître cette "continuité essentielle" que j'y vois. J'y ai renoncé, pour ne pas allonger outre mesure cette Promenade, déjà bien plus longue que prévu ! Je pense y revenir dans les Commentaires Historiques prévus dans le volume 4 des "Réflexions", à l'intention cette fois d'un lecteur mathématicien (ce qui change totalement la tâche d'exposition).

placé le mathématicien, attaché (comme tout un chacun) aux images mentales familières, devant un *dépaysement* soudain. C'étaient comme les changements, profonds peut-être mais progressifs, qui se font au fil des ans dans un être que nous aurions connu déjà enfant, et dont nous aurions suivi l'évolution depuis ses premiers pas jusqu'à son âge adulte et sa pleine maturité. Des changements imperceptibles en certaines longues périodes de calme plat, et tumultueux peut-être en d'autres. Mais même dans les périodes de croissance ou de mûrissement les plus intenses, et alors même que nous l'aurions perdu de vue pendant des mois, voire des années, à aucun moment il ne pouvait
pourtant y avoir le moindre doute, la moindre hésitation : c'est bien lui encore, un être bien connu P 55
et familier, que nous retrouvions, fut-ce avec des traits changés.

Je crois pouvoir dire, d'ailleurs, que vers le milieu de ce siècle, cet être familier avait déjà beaucoup vieilli — tel un homme qui se serait finalement épuisé et usé, dépassé par un afflux de tâches nouvelles auxquelles il n'était nullement préparé. Peut-être même était-il déjà mort de sa belle mort, sans que personne ne se soucie d'en prendre note et d'en faire le constat. "Tout le monde" faisait bien mine encore de s'affairer dans la maison d'un vivant, que c'en était quasiment comme s'il était encore bel et bien vivant en effet.

Or doncques, jugez de l'effet fâcheux, pour les habitués de la maison, quand à la place du vénérable vieillard figé, droit et raide dans son fauteuil, on voit s'ébattre soudain un gamin vigoureux, pas plus haut que trois pommes, et qui prétend en passant, sans rire et comme chose qui irait de soi, que Monsieur Espace (et vous pouvez même désormais laisser tomber le "Monsieur", à votre aise...) c'est *lui !* Si encore il avait l'air au moins d'avoir les traits de famille, un enfant naturel peut-être qui sait... mais pas du tout ! A vue de nez, rien qui rappelle le vieux Père Espace qu'on avait si bien connu (ou cru connaître...), et dont on était bien sûr, en tous cas (et c'était bien là la moindre des choses...) qu'il était éternel...

C'est *ça*, la fameuse "mutation de la notion d'espace". C'est *ça* que j'ai du "voir", comme chose d'évidence, dès les débuts des années soixante au moins, sans avoir jamais eu l'occasion de me le formuler avant ce moment même où j'écris ces lignes. Et je vois soudain avec une clarté nouvelle, par la seule vertu de cette évocation imagée et de la nuée d'association qu'elle suscite aussitôt : la notion traditionnelle d'"espace", tout comme celle étroitement apparentée de "variété" (en tous genres, et notamment celle de "variété algébrique"), avait pris, vers le moment où je suis venu dans les parages, un tel coup de vieux déjà, que c'était bien comme si elles étaient mortes...[67](*).
Et je pourrais dire que c'est avec l'apparition coup sur coup du point de vue des *schémas* (et de P 56
sa progéniture[68](*), plus dix mille pages de fondements à la clef), puis de celui des *topos*, qu'une situation de crise-qui-ne-dit-pas-son-nom s'est trouvée finalement dénouée.

Dans l'image de tantôt, ce n'est pas *d'un* gamin d'ailleurs qu'il faudrait parler, comme produit d'une mutation soudaine, mais de *deux*. Deux gamins, de plus, qui ont entre eux un "air de famille" irrécusable, même s'ils ne ressemblent guère au défunt vieillard. Et encore, en y regardant de près, on pourrait dire que le bambin Schémas ferait comme un "chaînon de parenté" entre feu Père Espace (alias Variétés-en-tous-genres) et le bambin Topos[69](**).

---

[67](*) Cette affirmation (qui semblera péremptoire à certains) est à prendre avec un "grain de sel". Elle n'est ni plus, ni moins valable que celle (que je reprends à mon compte plus bas) que le "modèle newtonien" de la mécanique (terrestre ou céleste) était "moribond" au début de ce siècle, quand Einstein est venu à la rescousse. C'est un fait qu'encore aujourd'hui, dans la plupart des situations "courantes" en physique, le modèle newtonien est parfaitament adéquat, et ce serait de la folie (vue la marge d'erreur admise dans les mesures faites) d'aller chercher des modèles relativistes. De même, dans de nombreuses situations en mathématique, les anciennes notions familiéres d'"espace" et de "variété" restent parfaitement adéquates, sans aller chercher des éléments nilpotents, des topos ou des "structures modérées". Mais dans l'un et l'autre cas, pour un nombre croissant de contextes intervenant dans une recherche de pointe, les anciens cadres conceptuels sont devenus inaptes à exprimer les situations même les plus "courantes".

[68](*) (A l'intention du mathématicien) Dans cette "progéniture", je compte notamment les schémas formels, les "multiplicités" en tous genres (et notamment, les multiplicités schématiques, ou formelles), enfin les espaces dits "rigide-analytiques" (introduits par Tate, en suivant un "maître d'œuvre" fourni par moi, inspiré par la notion nouvelle de topos, en même temps que par celle de schéma formel). Cette liste n'est d'ailleurs nullement exhaustive...

[69](**) Il y aurait lieu d'ailleurs, à ces deux bambins, d'en ajouter encore un troisième plus jeune, apparu en des temps moins cléments : c'est le marmot *Espace modéré*. Comme je l'ai signalé ailleurs, il n'a pas eu droit à un certificat de naissance, et c'est dans l'illégalité totale que je l'ai néanmoins inclus au nombre des douze "maître-thèmes" que j'ai eu l'honneur d'introduire en mathématique.

20 **20**. La situation me semble très proche de celle qui s'est présentée au début de ce siècle, avec l'apparition de la théorie de la relativité d'Einstein. Il y avait un cul-de-sac conceptuel, plus flagrant encore, se concrétisant par une *contradiction* soudaine, laquelle semblait irrésoluble. Comme de juste, l'idée nouvelle qui allait remettre de l'ordre dans le chaos était une idée d'une simplicité enfantine. La chose remarquable (et conforme à un scénario des plus répétitifs...), c'est que parmi tous ces gens brillants, éminents, prestigieux qui étaient sur les dents soudain, pour essayer de "sauver les meubles", personne n'y ait songé, à cette idée. Il fallait que ce soit un jeune homme inconnu, frais émoulu (si ça se trouve) des bancs des amphithéâtres estudiantins, qui vienne (un peu embarrassé peut-être de sa propre audace...) expliquer à ses illustres aînés ce qu'il fallait faire pour "sauver les phénomènes" : il y avait qu'à plus séparer l'espace du temps[70](***) ! Techniquement,
P 57 tout était réuni alors pour que cette idée éclose et soit accueillie. Et c'est à l'honneur des aînés d'Einstein, qu'ils aient sû en effet accueillir l'idée nouvelle, sans trop morigéner. C'est là un signe que c'était encore une grande époque...

Du point de vue mathématique, l'idée nouvelle d'Einstein était banale. Du point de vue de notre conception de *l'espace physique* par contre, c'était une mutation profonde, et un "dépaysement" soudain. La première mutation du genre, depuis le modèle mathématique de l'espace physique dégagé par Euclide il y avait 2400 ans, et repris tel quel pour les besoins de la mécanique par tous les physiciens et astronomes depuis l'antiquité (y inclus Newton), pour décrire les phénomènes mécaniques terrestres et stellaires.

Cette idée initiale d'Einstein s'est par la suite beaucoup approfondie, s'incarnant en un modèle mathématique plus subtil, plus riche et plus souple, en s'aidant du riche arsenal des notions mathématiques déjà existantes[71](*). Avec la "théorie de la relativité généralisée", cette idée s'élargit en une vaste *vision* du monde physique, embrassant dans un même regard le monde subatomique de l'infiniment petit, le système solaire, la voie lactée et les galaxies lointaines, et le cheminement des ondes électromagnétiques dans un espace-temps courbé en chaque point par la matière qui s'y trouve[72](**). C'est là la deuxième et la dernière fois dans l'histoire de la cosmologie et de la physique (à la suite de la première grande synthèse de Newton il y a trois siècles), qu'est apparue une vaste vision unificatrice, dans le langage d'un modèle mathématique, de l'ensemble des phénomènes physiques dans l'Univers.

Cette vision einsteinienne de l'Univers physique a d'ailleurs été débordée à son tour par les événements. "L'ensemble des phénomènes physiques" dont il s'agit de rendre compte a eu le temps de s'étoffer, depuis les débuts du siècle ! Il est apparu une multitude de théories physiques, pour
P 58 rendre compte chacune, avec plus ou moins de succès, d'un paquet limité de faits, dans l'immense capharnaüm de tous les "faits observés". Et on attend toujours le gamin audacieux, qui trouvera en jouant la nouvelle clef (s'il en est une...), le "modèle-gâteau" rêvé, qui veuille bien "marcher" pour sauver tous les phénomènes à la fois...[73](*)

---

[70](***) C'est un peu court, bien sûr, comme description de l'idée d'Einstein. Au niveau technique, il fallait mettre en évidence quelle structure mettre sur le nouvel espace-temps (c'était pourtant déjà "en l'air", avec la théorie de Maxwell et les idées de Lorenz). Le pas essentiel ici était non de nature technique, mais bien *"philosophique"* : se rendre compte que la notion de simultanéité pour des événements éloignés n'avait aucune réalité expérimentale. C'est ça, la "constatation enfantine", le "mais l'Empereur est nu !", qui a fait franchir ce fameux "cercle impérieux et invisible qui limite un Univers"...

[71](*) Il s'agit surtout de la notion de "variété riemanienne", et du calcul tensoriel sur une telle variété.

[72](**) Un des traits les plus frappants qui distingue ce modèle du modèle euclidien (ou newtonien) de l'espace et du temps, et aussi du tout premier modèle d'Einstein ("relativité restreinte"), c'est que la *forme topologique globale* de l'espace-temps reste indéterminée, au lieu d'être prescrite impérativement par la nature même du modèle. La question de savoir quelle est cette forme globale, me paraît (en tant que mathématicien) l'une des plus fascinantes de la cosmologie.

[73](*) On a appelé "théorie unitaire" une telle théorie hypothétique, qui arriverait à "unifier" et à concilier la multitude de théories partielles dont il a été question. J'ai le sentiment que la réflexion fondamentale qui attend d'être entreprise, aura à se placer sur deux niveaux différents.

1°) Une réflexion de nature "philosophique", sur la notion même de "modèle mathématique" pour une portion de la réalité. Depuis les succès de la théorie newtonienne, c'est devenu un axiome tacite du physicien qu'il *existe* un modèle mathématique (voire même, un modèle unique, ou *"le"* modèle) pour exprimer la réalité physique de façon parfaite, sans "décollement" ni bavure. Ce consensus, qui fait loi depuis plus de deux siècles, est comme une sorte de vestige fossile de la vivante vision d'un Pythagore que "Tout est nombre". Peut-être est-ce là le nouveau "cercle invisible", qui a remplacé les anciens cercles métaphysiques pour limiter l'Univers du physicien (alors que la race

La comparaison entre ma contribution à la mathématique de mon temps, et celle d'Einstein à la physique, s'est imposée à moi pour deux raisons : l'une et l'autre œuvre s'accomplit à la faveur d'une *mutation de la conception que nous avons de "l'espace"* (au sens mathématique dans un cas, au sens physique dans l'autre) ; et l'une et l'autre prend la forme d'une *vision unificatrice*, embrassant une vaste multitude de phénomènes et de situations qui jusque là apparaissaient comme séparés les uns des autres. Je vois là une *parenté d'esprit* évidente entre son œuvre[74](*) et la mienne. P 59

Cette parenté ne me semble nullement contredite par une différence de *"substance"* évidente. Comme je l'ai déjà laissé entendre tantôt, la mutation einsteinienne concerne la notion d'espace physique, alors qu'Einstein puise dans l'arsenal des notions mathématiques déjà connues, sans avoir jamais besoin de l'élargir, voire de le bouleverser. Sa contribution a consisté à dégager, parmi les structures mathématiques connues de son temps, celles qui étaient le mieux aptes à servir de "modèles" au monde des phénomènes physiques, en lieu et place du modèle moribond[75](**) légué par ses devanciers. En ce sens, son œuvre a bien été celle d'un *physicien*, et au delà, celle d'un *"philosophe de la nature"*, au sens où l'entendaient Newton et ses contemporains. Cette dimension P 60
"philosophique" est absente de mon œuvre mathématique, où je n'ai jamais été amené à me poser de question sur les relations éventuelles entre les constructions conceptuelles "idéales", s'effectuant dans l'Univers des choses mathématiques, et les phénomènes qui ont lieu dans l'Univers physique (voire même, les événements vécus se déroulant dans la psyché). Mon œuvre a été celle d'un *mathématicien*, se détournant délibérément de la question des "applications" (aux autres sciences),

des "philosophes de la nature" semble définitivement éteinte, supplantée haut-la-main par celle des ordinateurs...). Pour peu qu'un veuille bien s'y arrêter ne fut-ce qu'un instant, il est bien clair pourtant que la validité de ce consensus-là n'a rien d'évident. Il y a même des raisons philosophiques très sérieuses, qui conduisent à le mettre en doute a priori, ou du moins, à prévoir à sa validité des limites très strictes. Ce serait le moment ou jamais de soumettre cet axiome à une critique serrée, et peut-être même, de "démontrer", au delà de tout doute possible, qu'il n'est *pas* fondé : qu'il n'existe *pas* de modèle mathématique rigoureux unique, rendant compte de l'ensemble des phénomènes dits "physiques" répertoriés jusqu'à présent.

Une fois cernée de façon satisfaisante la notion même de "modèle mathematique", et celle de la "validité" d'un tel modèle (dans la limite de telles "marges d'erreur" admises dans les mesures faites), la question d'une "théorie unitaire" ou tout au moins celle d'un "modèle optimum" (en un sens à préciser) se trouvera enfin clairement posée. En même temps, on aura sans doute une idée plus claire aussi du degré d'arbitraire qui est attaché (par nécessité, peut-être) au choix d'un tel modèle.

2°) C'est *après* une telle réflexion seulement, il me semble, que la question "technique" de dégager un modèle explicite, plus satisfaisant que ses devanciers, prend tout son sens. Ce serait le moment alors, peut-être, de se dégager d'un deuxième axiome tacite du physicien, remontant à l'antiquité, lui, et profondément ancré dans notre mode de perception même de l'espace : c'est celui de la *nature continue* de l'espace et du temps (ou de l'espace-temps), du "lieu" donc où se déroulent les "phénomènes physiques".

Il doit y avoir déjà quinze ou vingt ans, en feuilletant le modeste volume constituant l'œuvre complète de Riemann, j'avais été frappé par une remarque de lui "en passant". Il y fait observer qu'il se pourrait bien que la structure ultime de l'espace soit "discrète", et que les représentations "continues" que nous nous en faisons constituent peut-être une simplification (excessive peut-être, à la longue...) d'une réalité plus complexe ; que pour l'esprit humain, "le continu" était plus aisé à saisir que "le discontinu", et qu'il nous sert, par suite, comme un "approximation" pour appréhender le discontinu. C'est là une remarque d'une pénétration surprenante dans la bouche d'un mathématicien, à un moment où le modèle euclidien de l'espace physique n'avait jamais encore été mis en cause ; au sens strictement logique, c'est plutôt le discontinu qui, traditionnellement, a servi comme mode d'approche technique vers le continu.

Les développements en mathématique des dernières décennies ont d'ailleurs montré une symbiose bien plus intime entre structures continues et discontinues, qu'un ne l'imaginait encore dans la première moitié de ce siècle. Toujours est-il que de trouver un modèle "satisfaisant" (ou, au besoin, un ensemble de tels modèles, se "raccordant" de façon aussi satisfaisante que possible...), que celui-ci soit "continu", "discret" ou de nature "mixte" — un tel travail mettra en jeu sûrement une grande imagination conceptuelle, et un flair consommé pour appréhender et mettre à jour des structures mathématiques de type nouveau. Ce genre d'imagination ou de "flair" me semble chose rare, non seulement parmi les physiciens (où Einstein et Schrödinger semblent avoir été parmi les rares exceptions), mais même parmi les mathématiciens (et là je parle en pleine connaissance de cause).

Pour résumer, je prévois que le renouvellement attendu (s'il doit encore venir...) viendra, plutôt d'un mathématicien dans l'âme, bien informé des grands problèmes de la physique, que d'un physicien, Mais surtout, il y faudra un homme ayant "l'ouverture philosophique" pour saisir le nœud du problème. Celui-ci n'est nullement de nature technique, mais bien un problème fondamental de "philosophie de la nature".

[74](*) Je ne prétends nullement être familier de l'œuvre d'Einstein. En fait, je n'ai lu aucun de ses travaux, et ne connais ses idées que par ouïe-dire et très approximativement. J'ai pourtant l'impression de discerner "la forêt", même si je n'ai jamais eu à faire l'effort de scruter aucun de ses arbres...

[75](**) Pour des commentaires sur le qualificatif "moribond", voir une précédente note de bas de page (note [67](*) page 55 ⟨39⟩).

ou des “motivations” et des racines psychiques de mon travail. D’un mathématicien, en plus, porté par son génie très particulier à élargir sans cesse l’arsenal des notions à la base même de son art. C’est ainsi que j’ai été amené, sans même m’en apercevoir et comme en jouant, à bouleverser la notion la plus fondamentale de toutes pour le géomètre : celle d’*espace* (et celle de “variété”), c’est à dire notre conception du *“lieu”* même où vivent les êtres géométriques.

La nouvelle notion d’espace (comme une sorte d’“espace généralisé”, mais où les points qui sont censés former l’“espace” ont plus ou moins disparu) ne ressemble en rien, dans sa substance, à la notion apportée par Einstein en physique (nullement déroutante, elle, pour le mathématicien). La comparaison s’impose par contre avec la *mécanique quantique* découverte par *Schrödinger*[76](*). Dans cette mécanique nouvelle, le “point matériel” traditionnel disparaît, pour être remplacé par une sorte de “nuage probabiliste”, plus ou moins dense d’une région de l’espace ambiant à l’autre, suivant la “probabilité” pour que le point se trouve dans cette région. On sent bien, dans cette optique nouvelle, une “mutation” plus profonde encore dans nos façons de concevoir les phénomènes mécaniques, que dans celle incarnée par le modèle d’Einstein — une mutation qui ne consiste pas à remplacer simplement un modèle mathématique un peu étroit aux entournures, par un autre similaire mais taillé plus large ou mieux ajusté. Cette fois, le modèle nouveau ressemble si peu aux bons vieux modèles traditionnels, que même le mathématicien grand spécialiste de mécanique a dû se sentir dépaysé soudain, voire perdu (ou outré...). Passer de la mécanique de Newton à celle d’Einstein doit être un peu, pour le mathématicien, comme de passer du bon vieux dialecte provençal à l’argot parisien dernier cri. Par contre, passer à la mécanique quantique, j’imagine, c’est passer du français au chinois.

Et ces “nuages probabilistes”, remplaçant les rassurantes particules matérielles d’antan, me
P 61 rappellent étrangement les élusifs “voisinages ouverts” qui peuplent les topos, tels des fantômes évanescents, pour entourer des “points” imaginaires, auxquels continue à se raccrocher encore envers et contre tous une imagination récalcitrante...

21 **21**. Cette brève excursion chez les “voisins d’en face”, les physiciens, pourra servir de point de repère pour un lecteur qui (comme la plupart des gens) ignore tout du monde des mathématiciens, mais qui a sûrement entendu causer d’Einstein et de sa fameuse “quatrième dimension”, voire même, de mécanique quantique. Après tout, même si ce n’était pas prévu par les inventeurs que leurs découvertes se concrétiseraient en des Hiroshima, et plus tard en des surenchères atomiques tant militaires que (soi-disant) “pacifiques”, le fait est que la découverte en physique a un impact tangible et quasi-immédiat sur le monde des hommes en général. L’impact de la découverte mathématique, et surtout en mathématiques dites “pures” (c’est à dire, sans motivation en vue d’“applications”) est moins direct, et sûrement plus délicat à cerner. Je n’ai pas eu connaissance, par exemple, que mes contributions à la mathématique aient “servi” à quoi que ce soit, pour construire le moindre engin disons. Je n’y ai aucun mérite qu’il en soit ainsi, c’est sûr, mais ça n’empêche que ça me rassure. Dès qu’il y a des applications, on peut être sûr que c’est les militaires (et après eux, la police) qui sont les premiers à s’en emparer — et pour ce qui est de l’industrie (même celle dite “pacifique”), ce n’est pas toujours tellement mieux...

Pour ma propre gouverne certes, ou pour celle d’un lecteur mathématicien, il s’imposerait plutôt d’essayer de situer mon œuvre par des “points de répère” dans l’histoire de la mathématique elle-même, plutôt que d’aller chercher des analogies ailleurs. J’y ai pensé ces derniers jours, dans la limite de ma connaissance assez vague de l’histoire en question[77](*). Au cours de la “Promenade” déjà, j’avais eu l’occasion d’évoquer une “lignée” de mathématiciens, d’un tempérament en lequel je me reconnais : Galois, Riemann, Hilbert. Si j’étais mieux au courant de l’histoire de mon art, il
P 62 y a des chances que je trouverais à prolonger cette lignée plus loin dans le passé, ou à y intercaler

[76](*) Je crois comprendre (par des échos qui me sont revenus de divers côtés) qu’on considère généralement qu’il y a eu en ce siècle trois “révolutions” ou grands bouleversements en physique : la théorie d’Einstein, la découverte de la radioactivité par les Curie, et l’introduction de la mécanique quantique par Schrödinger.

[77](*) Depuis que je suis gosse déjà, je n’ai jamais trop accroché à l’histoire (ni à la géographie d’ailleurs). (Dans la cinquième partie de Récoltes et Semailles (écrite seulement en partie), j’ai l’occasion “en passant” de détecter ce qui me semble la raison profonde de ce “bloc” partiel contre l’histoire — un bloc qui est en train de se résorber, je crois, au cours de ces dernières années.) L’enseignement mathématique reçu par mes aînés, dans le “cercle bourbachique”, n’a pas été d’ailleurs pour arranger les choses — les références historiques occasionnelles y ont été plus que rares.

peut-être quelques autres noms que je ne connais guère que par ouïe-dire. La chose qui m'a frappé, c'est que je ne me rappelle pas avoir eu connaissance, ne fût-ce que par allusion par des amis ou collègues mieux versés en histoire que moi, d'un mathématicien à part moi qui ait apporté une multiplicité d'idées novatrices, non pas plus ou moins disjointes les unes des autres, mais comme parties d'une vaste vision unificatrice (comme cela a été le cas pour Newton et pour Einstein en physique et en cosmologie, et pour Darwin et pour Pasteur en biologie). J'ai eu connaissance seulement de deux "moments" dans l'histoire de la mathématique, où soit née une vision nouvelle de vaste envergure. L'un de ces moments est celui de la naissance de la mathématique, en tant que science au sens où nous l'entendons aujourd'hui, il y a 2500 ans, dans la Grèce antique. L'autre est, avant tout, celui de la naissance du calcul infinitésimal et intégral, au dix-septième siècle, époque marquée par les noms de Newton, Leibnitz, Descartes et d'autres. Pour autant que je sache, la vision née en l'un ou en l'autre moment a été l'œuvre non d'un seul, mais l'œuvre collective d'une époque.

Bien sûr, entre l'époque de Pythagore et d'Euclide et le début du dix-septième, la mathématique avait eu le temps de changer de visage, et de même entre celle du "Calcul de infiniments petits" crée par les mathématiciens du dix-septième siècle, et le milieu du présent dix-neuvième. Mais peur autant que je sache, les changements profonds qui sont intervenus pendant ces deux périodes, l'une de plus de deux mille ans et l'autre de trois siècles, ne se sont jamais concrétisés ou condensés en une vision nouvelle s'exprimant dans une œuvre donnee[78](*), d'une façon similaire à ce qui a eu lieu en physique et en cosmologie, avec les grandes synthèses de Newton, puis d'Einstein, en deux moments cruciaux de leur histoire.

Il semblerait bien qu'en tant que serviteur d'une vaste vision unificatrice née en moi, je sois P 63 "unique en mon genre" dans l'histoire de la mathématique de l'origine à nos jours. Désolé d'avoir l'air de vouloir me singulariser plus qu'il ne paraît permis ! A mon propre soulagement, je crois pourtant discerner une sorte de *frère* potentiel (et providentiel !). J'ai déjà eu tantôt l'occasion de l'évoquer, comme le premier dans la lignée de mes "frères de tempérament" : c'est *Evariste Galois*. Dans sa courte et fulgurante vie[79](*), je crois discerner l'amorce d'une grande vision — celle justement des "épousailles du nombre et de la grandeur", dans une vision géométrique nouvelle. J'évoque ailleurs dans Récoltes et Semailles[80](**) comment, il y a deux ans, est apparu en moi cette intuition soudaine : que dans le travail mathématique qui à ce moment exerçait sur moi la fascination la plus puissante, j'étais en train de "reprendre l'héritage de Galois". Cette intuition, rarement évoquée depuis, a pourtant eu le temps de mûrir en silence. La réflexion rétrospective sur mon œuvre que je poursuis depuis trois semaines y aura sûrement encore contribué. La filiation la plus directe que je crois reconnaître à présent avec un mathématicien du passé, est bien celle qui

[78](*) Des heures après avoir écrit ces lignes, j'ai été frappé que je n'aie pas songé ici à la vaste synthèse des mathématiques contemporaines que s'efforce de présenter le traité (collectif) de N. Bourbaki. (Il sera encore abondamment question du groupe Bourtaki dans la première partie de Récoltes et Semailles.) Cela tient, il me semble, à deux raisons.

D'une part, cette synthèse se borne à une sorte de "mise en ordre" d'un vaste ensemble d'idées et de résultats déjà connus, sans y apporter d'idée novatrice de son crû. Si idée nouvelle il y a, ce serait celle d'une définition mathématique précise de la notion de "structure", qui s'est révélée un fil conduteur précieux à travers tout le traité. Mais cette idée me semble s'assimiler plutôt à celle d'un lexicographe intelligent et imaginatif, qu'à un élément de renouveau d'une langue, donnant une appréhension renouvelée de la réalité (ici, de celle des choses mathématiques).

D'autre part, dès les années cinquante, l'idée de structure s'est vue dépasser par les événements, avec l'afflux soudain des méthodes "catégoriques" dans certaines des parties les plus dynamiques de la mathématique, telle la topologie ou la géométrie algébrique. (Ainsi, la notion de "topos" refuse d'entrer dans le "sac bourbachique" des structures, décidément étroit aux entournures !) En se décidant, en pleine connaissance de cause, certes, à ne pas s'engager dans cette "galère", Bourbaki a par là-même renoncé à son ambition initiale, qui était de fournir *les* fondements et *le* langage de base pour l'ensemble de la mathématique contemporaine.

Il a, par contre, fixé un langage et, en même temps, un certain *style* d'écriture et d'approche de la mathématique. Ce style était à l'origine le reflet (très partiel) d'un certain *esprit*, vivant et direct héritage de Hilbert. Au cours des années cinquante et soixante, ce style a fini par s'imposer — pour le meilleur et (surtout) pour le pire. Depuis une vingtaine d'années, il a fini par devenir un rigide *"canon"* d'une "rigueur" de pure façade, dont l'esprit qui l'animait jadis semble disparu sans retour.

[79](*) Evariste Galois (1811–1832) est mort dans un duel, à l'âge de vingt-et-un ans. Il y a, je crois, plusieurs biographies de lui. J'ai lu comme jeune homme une biographie romancée, écrite par le physicien Infeld, qui m'avait beaucoup frappée à l'époque.

[80](**) Voir "L'héritage de Galois" (ReS I, section 7).

me relie à Evariste Galois. A tort ou à raison, il me semble que cette vision que j'ai développée pendant quinze années de ma vie, et qui a continué encore à mûrir en moi et à s'enrichir pendant les seize années écoulées depuis mon départ de la scène mathématique — que cette vision est aussi
P 64 celle que Galois n'aurait pu s'empêcher de développer[81](***), s'il s'était trouvé dans les parages à ma place, et sans qu'une mort précoce ne vienne brutalement couper court un magnifique élan.

Il y a une autre raison encore, sûrement, qui contribue à me donner ce sentiment d'une "parenté essentielle" — d'une parenté qui ne se réduit pas au seul "tempérament mathématique", ni aux aspects marquants d'une œuvre. Entre sa vie et la mienne, je sens aussi une parenté de destins. Certes, Galois est mort stupidement, à l'âge de vingt-et-un ans, alors que je vais, moi, sur mes soixante ans, et bien décidé à faire de vieux os. Cela n'empêche pourtant qu'Evariste Galois est resté de son vivant, tout comme moi un siècle et demi plus tard, un *"marginal"* dans le monde mathématique officiel. Dans le cas de Galois, il pourrait sembler à un regard superficiel que cette marginalité était "accidentelle", qu'il n'avait tout simplement pas eu le temps encore de "s'imposer" par ses idées novatrices et par ses travaux. Dans mon cas, ma marginalité, pendant les trois premières années de ma vie de mathématicien, était due à mon ignorance (délibérée peut-être...) de l'existence même d'un monde des mathématiciens, auquel j'aurais à me confronter; et depuis mon départ de la scène mathématique, il y a seize ans, elle est la conséquence d'un choix délibéré. C'est ce choix, sûrement, qui a provoqué en représailles une "volonté collective sans failles" d'effacer de la mathématique toute trace de mon nom, et avec lui la vision aussi dont je m'étais fait le serviteur.

Mais au delà de ces différences accidentelles, je crois discerner à cette "marginalité" une cause commune, que je sens essentielle. Cette cause, je ne la vois pas dans des circonstances historiques, ni dans des particularités de "tempérament" ou de "caractère" (lesquels sont sans doute aussi différents de lui à moi qu'ils peuvent l'être d'une personne à une autre), et encore moins certes au niveau des "dons" (visiblement prodigieux chez Galois, et comparativement modestes chez moi). S'il y a bien une "parenté essentielle", je la vois à un niveau bien plus humble, bien plus élémentaire.

J'ai senti une telle parenté en quelques rares occasions dans ma vie. C'est par elle aussi que je me sens "proche" d'un autre mathématicien encore, et qui fut mon aîné : *Claude Chevalley*[82](*). Le lien que je veux dire est celui d'une certaine "naïveté", ou d'une "innocence", dont j'ai eu
P 65 occasion de parler. Elle s'exprime par une propension (souvent peu appréciée par l'entourage) à regarder les choses par ses propres yeux, plutôt qu'à travers des lunettes brevetées, gracieusement offertes par quelque groupe humain plus ou moins vaste, investi d'autorité pour une raison ou une autre.

Cette "propension", ou cette attitude intérieure, n'est pas le privilège d'une maturité, mais bien celui de l'enfance. C'est un don reçu en naissant, en même temps que la vie — un don humble et redoutable. Un don souvent enfoui profond, que certains ont su conserver tant soit peu, ou retrouver peut-être...

On peut l'appeler aussi *le don de solitude.*

[81](***) Je suis persuadé d'ailleurs qu'un Galois serait allé bien plus loin encore que je n'ai été. D'une part à cause de ses dons tout à fait exceptionnels (que je n'ai pas reçus en partage, quant à moi). D'autre part parce qu'il est probable qu'il n'aurait pas, comme moi, laissé se distraire la majeure part de son énergie, pour d'interminables tâches de mise en forme minutieuse, au fur et à mesure, de ce qui est déjà plus ou moins acquis...

[82](*) Je parle de Claude Chevalley ici et là dans Récoltes et Semailles, et plus particulièrement dans la section "Rencontre avec Claude Chevalley — ou liberté et bons sentiments" (ReS I section 11), et dans la note "Un adieu à Claude Chevalley" (ReS III, note n° 100).

Epilogue en post-scriptum — ou contexte et préalables d'un débat L 44

Février 1986

13. Voilà sept mois bien tassés que cette Lettre a été écrite, et près de quatre mois qu'elle est envoyée, avec le "pavé" qui va avec. Et avec une dédicace de ma main dans chacune[83](*). Comme une "bouteille à la mer", ou plutôt, comme toute une floppée de telles bouteilles vagabondes, mon message est allé atterrir et circuler jusque dans les coins les plus reculés de ce microcosme mathématique qui me fut familier. Et par les échos directs et indirects qui m'en reviennent au fil des jours, des semaines et des mois, me voilà inopinément comme devant une vaste radiographie du milieu mathématique, laquelle serait prise par un spectagraphe tentaculaire, dont mes innocentes "bouteilles" seraient autant d'antennes voyageuses. Du coup (noblesse oblige !), moi qui pourtant ne manque pas de quoi m'occuper, me voilà placé devant la nouvelle tâche de déchiffrer la radio et de rendre compte, du mieux que je pourrai, de ce que j'y ai lu. Ce sera pour une sixième (et dernière, c'est promis !) partie de Récoltes et Semailles. Celle-ci viendra donc couronner, si Dieu me prête vie, "la grande œuvre sociologique de mes vieux jours". Pour le moment, quelques premiers commentaires. *13*

Pour accueillir ma modeste flottille très artisanale, ce qui semble dominer et de loin, c'est le ton mi-gouailleur, mi-hargneux, sur l'air du "voilà Grothendieck qui devient parano sur ses vieux jours", ou "en voilà un qui se prend bien au sérieux" — et le tour est joué ! Je n'ai eu pourtant qu'une seule lettre de ce style-là[84](**), plus deux autres encore dans celui d'une dérision feutrée et ravie d'elle-même[85](***). La plupart de mes destinataires mathématiciens, y compris parmi ceux qui furent mes élèves, ont répondu par le silence[86](****) — un silence qui m'en dit long.

Cela n'empêche que j'ai eu déjà une volumineuse correspondance. La grande plupart des lettres sont dans les tons de l'embarras poli, lequel souvent se voudrait amical, comme par un souci de bienséance. Deux ou trois fois j'ai senti, derrière cet embarras et comme tamisé par lui, la chaleur d'un sentiment toujours vivant. Le plus souvent, quand l'embarras ne s'exprime par des protestations de bons sentiments (pour son propre compte, ou pour celui d'autrui), c'est par des compliments — je n'en aurai jamais tant reçu de ma vie ! Sur l'air du "grand mathématicien", "pages superbes" (sur la créativité "et tout ça"), "incontestable écrivain", et j'en passe. Pour faire bonne mesure, j'ai même eu droit à un compliment bien senti (et nullement ironique) sur la richesse de ma vie intérieure. Inutile de dire que dans toutes ces lettres-là, mon correspondant n'a garde d'entrer dans le vif d'aucune question et encore moins, de s'y impliquer personnelement ; le ton serait plutôt de celui qui aurait été "sollicite de donner son opinion" (pour reprendre les termes d'une de ces lettres), sur une affaire un peu scabreuse et ce qui plus est, hypothétique voire imaginaire, et en tous cas et surtout, une affaire *qui ne le concerne pas personnellement.* Quand il fait mine pourtant d'y toucher, à une de ces questions, c'est du bout des doigts et pour la tenir aussi loin de lui qu'il le peut — que ce soit à la faveur de bons conseils à moi prodigués, ou par des conditionnels prudents, ou par les lieux communs d'usage quand on ne sait trop quoi dire, ou de toute autre façon. Certains quand même ont laissé entendre qu'il y avait *peut-être* des choses pas très normales qui se sont passées — tout en prenant soin de laisser dans le plus grand vague de quoi et de qui il s'agit… L 45

J'ai eu aussi des échos franchement chaleureux, de la part de quinze ou seize de mes anciens et nouveaux amis. Certains exprimaient une émotion, sans velléité de vouloir s'en cacher ou de la faire taire. Ces échos, et d'autres tout aussi chaleureux me venant d'en dehors du milieu mathématique, auront été ma récompense pour un long et solitaire travail, fait non seulement pour moi-même, mais pour tous.

[83](*) Il y a quelques rares exceptions, comprenant surtout les collègues que je ne connais pas personnellement, et qui ont reçu seulement les fascicules 0 et 4 du tirage provisoire, en prime pour leur participation active à mon Enterrement.

[84](**) Cette lettre provient d'un de ceux qui furent mes élèves, et de plus, un de mes coenterrés.

[85](***) De la part de deux de mes anciens collègues de travail au sein de Bourbaki, et dont l'un est un des aînés qui m'avaient accueilli avec une chaleureuse bienveillance, lors de mes débuts,

[86](****) Pour cent trente-et-un envois à des mathématiciens, il y a eu jusqu'à présent cinquante-trois parmi les destinataires qui ont donné signe de vie, ne fut-ce que pour accuser réception. Parmi ceux-ci, il y a six de mes ex-élèves — je n'ai pas eu signe de vie d'aucun des huit autres.

Et parmi les quelques cent-trente collègues qui ont reçu ma Lettre, il en est trois qui y ont répondu, au plein sens du terme, en s'impliquant eux-mêmes, au lieu de se borner à un commentaire lointain sur les événements du siècle. J'ai reçu un autre tel écho encore d'une correspondante non mathématicienne. C'étaient des vraies *réponses* à mon message. Et c'était là aussi la meilleure de mes récompenses.

L 46 **14**. Plusieurs parmi mes collègues et amis mathématiciens ont exprimé l'espoir que Récoltes et
14 Semailles ouvre un large *débat* dans le milieu mathématique, sur l'état des mœurs dans ce milieu, sur l'éthique du mathématicien, et sur le sens et la finalité de son travail. Pour le moment, le moins qu'on puisse dire, c'est que ça n'en prend pas le chemin. Dès à présent (et pour faire le jeu de mots de rigueur) le débat sur un Enterrement a tout l'air d'être remplacé d'office par l'enterrement d'un débat !

Cela n'empêche, qu'on le veuille ou non et malgré le silence et l'apathie du grand nombre, qu'un débat se trouve bel et bien ouvert. Il est peu probable qu'il prenne jamais l'ampleur d'un véritable débat public, voire même (qu'à Dieu ne plaise !) la pompe et la raideur du débat "officiel". Nombreux en tous cas sont ceux qui d'ores et déjà ont pris les devants vite fait, pour le fermer en leur for intérieur avant même d'en avoir pris connaissance, forts du sempiternel et immuable consensus que "tout est pour le mieux dans le meilleur des mondes" (mathématiques, en l'occurence). Peut-être pourtant qu'une mise en cause finira par venir *du dehors*, progressivement, par des "témoins" qui, ne faisant pas partie du même milieu, ne sont pas prisonniers de ses consensus de groupe, et qui ne se sentent donc pas (même en leur for intérieur) mis en cause personnellement.

Dans presque tous les échos reçus, je constate une même confusion au sujet des deux questions préalables : *sur quoi* porte de "débat" posé (du moins tacitement) par Récoltes et Semailles ; et *qui* est apte à en prendre connaissance et à s'y prononcer, ou encore : à se faire une opinion en pleine connaissance de cause. A ce propos, je voudrais ici bien marquer *trois "points de repère"*. Cela n'empêchera pas, certes, ceux qui tiennent à la confusion de continuer à s'y maintenir. Du moins, pour ceux qui voudraient savoir de quoi il retourne, peut-être cela pourra-t-il les aider à ne pas se laisser distraire par les bruitages tous azimuts (y compris même les mieux intentionnés...).

a) Tels amis sincères m'assurent que "tout va finir par s'arranger" (où "tout", j'imagine, signifie des "choses" qui se seraient malencontreusement abîmées...) ; que je n'avais qu'à faire ma rentrée, "m'imposer par de nouveaux travaux", donner des conférences etc — et les autres feraient le reste. On dira généreusement "On a été un peu injuste quand même avec ce sacré Grothendieck", et de
L 47 rectifier le tir discrètement et avec plus ou moins de conviction[87](*) ; voire, le lui tapoter l'épaule d'un air paterne en lui donnant du "grand mathématicien", histoire de calmar un quidam somme toute respectable, qui fait mine hélas de s'énerver et de faire des vagues indésirables.

Il ne s'agit nullement, comme le suggèrent les amis, de "lâcher du lest" ou d'en faire lâcher. Je n'ai, pour ma part, nul besoin de compliments ni même d'admirateurs sincères, et pas non plus de "aliés", pour "ma" cause ou pour quelque cause que ce soit. Ce n'est pas de moi qu'il s'agit, qui me porte à merveille, ni de mon œuvre, qui parle pour elle-même, fut-ce à des sourds. Si ce débat concerne aussi, entre autres, ma personne et mon œuvre, c'est simplement à titre de *révélateurs* d'autre chose, à travers la réalité d'un Enterrement (des plus révélateurs en effet).

S'il y a "quelqu'un" qui me paraît devoir inspirer un sentiment d'alarme, d'inquitude et d'urgence, ce n'est nullement ma personne, ni même aucun des mes "coenterrés". Mais il s'agit d'un être collectif, à la fois insaisissable et très tangible, dont on parle souvent et qu'on se garde bien d'examiner jamais, et qui a nom *"la communauté mathématique"*.

Au cours de ces dernières semaines, j'ai fini par la voir comme une personne en chair et en os, et dont le corps serait frappé d'une *gangrène* profonde. La meilleure nourriture, les plats les plus choisis, en elle se tournent en poison, qui fait se propager et s'incruster davantage le mal. Pourtant, il y a une boulimie irrésistible de se gaver encore et toujours davantage, comme une façon sûrement de se donner le change, au sujet d'un mal dont elle ne voudrait prendre connaissance à aucun prix. Quoi qu'on puisse lui dire est peine perdue — les mots mêmes les plus simples ont perdu leur sens.

[87](*) J'ai eu occasion de noter déjà plusieurs tels signes discrets, montrant qu'on a pris bonne note que le lion s'est réveillé...

Ils cessent d'être porteurs d'un message, et ne servent plus qu'à déclencher les déclics de la peur et du refus...

b) La plupart de mes collègues ou anciens amis même bien disposés, quand ils hasardent une opinion, s'entourent de conditionnels prudents, du genre "s'il était vrai que... ce serait en effet inadmissible" — histoire de se recoucher contents sur leurs deux oreilles. J'avais cru pourtant être clair...

Avec le recul de sept mois, je puis préciser maintenant que *pour la quasi-totalité des faits* rapportés et commentés dans Récoltes et Semailles, *leur réalité ne fait l'objet d'aucune controverse.* Je reviendrai plus loin sur les quelques rares exceptions, qui seront d'ailleurs signalées comme telles. chacune en son lieu. Pour tous les autres faits, après l'écriture de la version primitive de Récoltes et Semailles, une confrontation soigneuse avec certains des principaux concernés (à L 48
savoir, Pierre Deligne, Jean-Pierre Serre et Luc Illusie) a permis d'éliminer les erreurs de détail, et d'arriver à un accord sans ambiguité au sujet des faits matériels eux-mêmes[88](*).

Ainsi, le débat ne porte nullement sur la réalité des faits, laquelle n'est pas en cause, mais sur la question *si les pratiques et les attitudes décrites par ces faits doivent être considérées comme admises et comme "normales", ou non.*

Il s'agit ici de pratiques que dans mon témoignage je qualifie (à tort peut-être...) de scandaleuses : comme des abus de confiance ou de pouvoir et comme des malhonnêtetés flagrantes, atteignant plus d'une fois la dimension de l'inique et de l'éhonté. La chose assez inimaginable qu'il me restait à apprendre encore, après avoir pris connaissance de ces faits (impensables il y a encore quinze ans), c'est qu'une grande majorité parmi mes collègues mathématiciens, et jusque parmi ceux qui furent mes élèves ou des amis, considère aujourd'hui ces pratiques comme normales et parfaitement honorables.

c) Il y a une deuxième façon pour beaucoup de mes collègues et anciens amis pour maintenir une confusion. C'est sur l'air du : "désolé, mais on n'est pas spécialiste en la matière — ne nous demande pas de prendre connaissance de faits, qui nous passent (providentiellement...) par dessus la tête...".

J'affirme, au contraire, que pour prendre connaissance des faits principaux, point n'est besoin d'être "spécialiste" (désolé à mon tour !), ni même de connaître sa table de multiplication ou le théorème de Pythagore. Pas même d'avoir lu "Le Cid" ou les Fables de la Fontaine. Un enfant de dix ans normalement développé en est tout aussi capable que le plus réputé des spécialistes (voire même, mieux que lui...)[89](**).

Qu'on me permette d'illustrer ce point par juste un exemple, le "premier venu" tiré de l'Enterrement[90](***). Point n'est besoin de connaître les tenants et aboutissants de la notion mathématique L 49
multiforme et fort délicate de "motif", ni d'avoir seulement son certificat d'études, pour prendre connaissance des quelques faits suivants, et pour porter un jugement à leur sujet.

1°) Entre 1963 et 1969 j'ai introduit la notion de "motif", et j'ai développé autour de cette notion une "philosophie" et une "théorie", restées partiellement conjecturales. A tort ou à raison (peu importe ici), je considère la théorie des motifs comme ce que j'ai apporté de plus profond à la mathématique de mon temps. L'importance et la profondeur du "yoga motivique" n'est d'ailleurs aujourd'hui plus contestée par personne (après dix ans d'un silence quasi-complet à son sujet, dès après mon départ de la scène mathématique).

2°) Dans le premier et seul livre (publié en 1981), consacré pour l'essentiel à la théorie des motifs (et où ce nom, introduit par moi, figure dans le titre du livre), le seul et unique passage qui puisse faire soupçonner au lecteur que ma modeste personne soit liée de près ou de loin à quelque théorie qui pourrait ressembler à celle développée en long et en large dans ce livre, se trouve à

[88](*) Je suis heureux d'exprimer ma reconnaissance à tous les trois, pour la bonne volonté dont ils ont fait preuve en cette occasion, et leur donne acte pour leur bonne foi totale, pour tout ce qui concerne les questions de faits matériels.

[89](**) Bien entendu, ce n'est pas à l'intention de l'enfant de dix ans que j'ai écrit Récoltes et Semailles, et pour m'adresser à lui je choisirais un langage qui lui soit familier.

[90](***) Il s'agit de la première "grande opération" d'Enterrement que j'aie découverte, un certain 19 avril 1984, où c'est aussi imposé à moi le nom "l'Enterrement". Voir à ce sujet les deux notes écrites le même jour, "Souvenir d'un rêve — ou la naissance des motifs", et "L'Enterrement — ou le Nouveau Père" (ReS II, nos 51, 52). On y trouve aussi la référence complète du livre dont il va être question.

la page 261. Ce passage (de deux lignes et demie) consiste à expliquer au lecteur que la théorie développée là n'a rien à voir avec celle d'un dénommé Grothendieck (théorie mentionne là pour la première et dernière fois, sans autre référence ni précision).

3°) Il y a une conjecture célèbre, dite "conjecture de Hodge" (peu importe de quoi elle parle au juste), dont la validité impliquerait que la soi-disante "autre" théorie des motifs développée dans le brillant volume, est *identique* à (un cas très particulier de) celle que j'avais développée, au vu et su de tous, près de vingt ans avant.

Je pourrais ajouter un 4°) que le plus prestigieux parmi les quatre cosignataires du livre a été mon élève, et que c'est de nul autre que de moi qu'il a appris au fil des ans les brillantes idées qu'il présente là comme s'il venait de les trouver à l'instant[91](*), et 5°) que ces deux circonstances sont de notoriété publique parmi les gens bien informés, mais que c'est en vain qu'on chercherait
L 50 dans la littérature une trace écrite attestant que ledit brillant auteur pourrait avoir appris quelque chose par ma bouche[92](*), et que 6°) la délicate question d'arithmétique qui (selon ce que m'en a expliqué l'auteur principal en personne) constitue le problème central du livre (et sans que mon nom ne soit prononcé), avait été dégagée par moi dans les années soixante, dans la foulée du "yoga des motifs", et que c'est par moi que l'auteur en a eu connaissance ; et je pourrais empiler encore des 7° et 8° etc (ce que je ne manque certes pas de faire en son lieu).

Ce qui précède suffira à mon propos, qui est celui-ci. Pour prendre connaissance de tels faits et porter un jugement à leur sujet, point n'est besoin de "compétences" particulières — *ce n'est pas à ce niveau-là "que ça se passe"*. La faculté qui est en jeu ici, à part la saine raison (dévolue en principe à tout un chacun) est ce que j'appellerais du nom de *sentiment de décence*.

Le livre en question est dès à présent un des plus cités de la littérature mathématique, et son "auteur principal", un des mathématiciens les plus prestigieux de l'époque. Ceci dit et bien vu, la chose à présent de loin la plus remarquable à mes yeux, dans cette histoire, c'est que *personne* parmi les innombrables lecteurs de ce livre, y compris parmi ceux qui savent de première main de quoi il retourne, et qui furent mes élèves, ou mes amis — que *personne n'y a rien vu d'anormal*. Il n'y en a pas un en tous cas, jusqu'à aujourd'hui encore où j'écris ces lignes, qui se soit fait connaître à moi pour exprimer au sujet de ce livre prestigieux la moindre réserve[93](**).

Quant à ceux, parmi mes collègues et anciens amis, qui n'ont jamais tenu ce livre entre leurs mains et qui s'en prévalent pour plaider l'incompétence, je leur dis : point n'est besoin d'être "spécialiste" pour demander le volume dans la première bibliothèque mathématique venue, le feuilleter, et constater par vous-mêmes ce qui n'est contesté par personne...

15 **15**. Cette "opération motifs" n'est qu'*une* parmi quatre "grandes opérations" de la même eau, et parmi une nuée d'autres de moindre envergure et dans le même esprit. Ce n'est nullement la plus
L 51 "grosse" des mystifications collectives qui viennent étoffer mon "tableau de mœurs" d'une époque, ni surtout la plus inique. Elle a consisté à piller seulement le troupeau du riche, à la faveur de son absence (ou de son décès...), et non point à venir (dans l'indifférence générale) étrangler pour le plaisir et sous ses yeux, la brebis du pauvre. Et jusque dans le langage mathématique entré dès à présent dans l'usage courant, des noms d'anodine apparence de livres, de notions ou d'énoncés cités à tout moment, sont par eux-même déjà une mystification ou une imposture[94](*), et témoignent à leur façon de la disgrâce d'une époque.

---

[91](*) Je n'entends pas dire qu'il n'y a pas dans ce livre des idées, et même de belles idées, dues à cet auteur ou aux autres co-auteurs. Mais toute la problèmatique du livre, et le contexte conceptuel qui lui donne son sens, et jusques y compris la théorie délicate des $\otimes$-catégories (appelées à tort "tannakiennes"), laquelle techniquement constitue le cœur du livre, sont mon œuvre.

[92](*) A l'exception cependant d'une ligne dans un rapport de la plume de Serre, en 1977, dont il sera question en son lieu.

[93](**) Il y a eu en tout et pour tout deux collègues (y compris Zoghman Mehkhout) qui m'aient exprimé de telles "réserves". Ni l'un ni l'autre ne peuvent passer pour "lecteurs" de ce livre. Ils l'ont regardé par curiosité, histoire de se rendre compte...

[94](*) Je pense ici, surtout, au sigle insolite "SGA $4\frac{1}{2}$" (c'est utile les nombres fractionnaires !), qui est une double imposture à lui tout seul (et un des sigles les plus cités dans la littérature mathématique contemporaine), et aux noms "dualité de Verdier" ou "dual de Verdier", "conjecture de Deligne–Grothendieck", ou enfin "catégories tannakiennes" (où Tannaka, pour le coup, n'est pas en cause, car il n'a jamais été consulté...). Il en sera question de façon plus circonstanciée en son lieu.

Si je crois avoir jamais fait œuvre utile pour la “communauté mathématique”, c’est d’avoir porté à la pleine lumière du jour un certain nombre de faits peu glorieux, qui faisandaient dans l’ombre. Le genre de faits, sûrement, que tout le monde cotoye tous les jours ou peu s’en faut, de près ou de loin. Combien en est-il parmi eux qui ont pris le loisir de s’arrêter ne fut-ce qu’un instant, pour humer l’air et pour regarder ?

Celui qui s’est lui-même trouvé en butte à la morgue des uns et à la malhonnêteté des autres (ou des mêmes), peut-être se flattait-il que c’était là une malchance toute spéciale, à lui dévolue. Confrontant son expérience à mon témoignage, peut-être sentira-t-il que cette “malchance” est aussi un nom qu’il a donné à un *esprit du temps*, lequel pèse sur lui connue il pèse sur tous. Et (qui sait !) peut-être cela l’incitera-t-il à s’impliquer dans un débat, qui le concerne tout autant qu’il me concerne.

Mais si ce “linge sale” que “j’étale sur la place publique” ne suscite autre chose que le ricanement sans joie des uns et l’embarras poli des autres, dans l’indifférence de tous, une situation qui était trouble sera devenue très claire. (Pour celui au moins qui se soucie encore de se servir de ses yeux.) Les consensus traditionnels de la bonne foi et de la décence[95](**), dans la relation entre mathématiciens et dans celle du mathématicien à son art, seraient désormais choses du L 52
passé, “dépassées”. Sans que quelque association internationale de mathématiciens ait encore à le proclamer solennellement, ce serait pourtant chose entendue désormais et quasiment officielle : à présent, *tous les coups sont permis*, sans plus aucune réserve ni limitation, pour la “confrérie par cooptation” de ceux qui disposent du pouvoir dans le monde mathématique. Tous les magouillages d’idées pour mener par le bout du nez le lecteur apathique qui ne demande qu’à croire, tous les trafics de paternité, et les citations-bidon entre compères et le silence pour ceux voués au silence, et les copinages et les falsifications de toutes sortes et jusqu’au plagiat le plus grossier au vu et su de tous — *oui et amen à tout*, avec la bénédiction, par la parole ou par le silence (quand ce n’est avec la participation active et empressée), de tous les “grands noms” et de tous les grands et petits patrons sur la place publique mathématique. Oui et amen au *“nouveau style”* qui y fait fureur ! Ce qui fut un art, le voilà devenu, par assentiment (quasiment) unanime, la foire à l’embrouille et à l’empoigne, sous l’œil paterne des chefs.

Il fut un temps où l’exercice du pouvoir, dans le monde des mathématiciens, était limité par des consensus unanimes et intangibles, expression d’un sentiment collectif de *décence*. Ces consensus et ce sentiment seraient désormais choses désuètes et dépassées, indignes assurément de l’époque glorieuse des ordinateurs, des cellules spatiales et de la bombe à neutrons.

Ce serait chose désormais acquise et scellée : le pouvoir, pour la confrérie de ceux qui en disposent, est un *pouvoir discrétionnaire*.

16. Dans la Lettre, je me suis suffisamment expliqué, je pense, sur l’esprit dans lequel j’ai *16*
écrit Récoltes et Semailles, pour qu’il soit bien clair que je ne prétends nullement y faire œuvre d’historien. Il s’agit d’un témoignage de bonne foi, concernant un vécu de première main, et d’une réflexion sur ce vécu. Témoignage et réflexion sont à la disposition de tous, y compris de l’historien, qui pourra l’utiliser comme un matériau parmi d’autres. C’est à lui qu’il appartient alors de soumettre ce matériau à une analyse critique, conforme aux canons de rigueur de son art.

Il convient, bien sûr, de distinguer entre les *faits* au sens restreint (les “faits bruts” ou “faits matériels”), et l’ “évaluation” ou *“interprétation”* de ces faits, qui leur donne un *sens*, lequel n’est L 53
pas le même, pour un observateur (ou un coacteur) et pour un autre. Grosso modo, on peut dire que l’aspect “témoignage” de Récoltes et Semailles concerne les faits, et que son aspect “réflexion” concerne leur interprétation, c’est à dire mon travail pour leur donner un sens. Parmi les “faits” formant le témoignage, je range également les “faits psychiques”, et notamment les sentiments, associations et images de toutes sortes dont mon témoignage est le reflet, que ceux-ci aient lieu dans un passé plus ou moins reculé, ou au moment même de l’écriture.

Pour les faits que je décris ou dont je fais état dans Récoltes et Semailles, je distingue trois sortes de *sources*. Il y a les faits que me restitue le *souvenir*, plus ou moins précis ou plus ou

[95](**) Quand je parle de ces “consensus de bonne foi et de décence”, je n’entends pas dire qu’ils n’étaient jamais transgressés. Mais alors même qu’ils étaient transgressés, c’était bien de “transgressions” qu’il s’agissait, et les consensus eux-mêmes n’en restaient pas moins acceptés.

moins flou d'une occasion à l'autre, et parfois déformé. A leur sujet, je puis me porter garant pour des dispositions de vérité au moment où j'écris, mais nullement de l'absence de toute erreur. Au contraire, j'ai eu l'occasion d'en relever un certain nombre, erreurs de détail que je signale en leur lieu par des notes de bas de page ultérieures. Il y a, d'autre part, les *documents écrits*, notamment des lettres et surtout des publications scientifiques en bonne et due forme, auxquelles je réfère à l'occasion avec toute la précision souhaitable. Il y a, enfin, le *témoignage de tierces personnes*. Parfois il vient en complément à mes propres souvenirs, me permettant de les raviver, de les préciser et, parfois, de les corriger. Dans certaines rares occasions (sur lesquelles je vais revenir tantôt), ce témoignage m'apporte des informations entièrement nouvelles par rapport à celles qui m'étaient déjà connues. Quand il m'arrive de me faire l'écho d'un tel témoignage, cela ne signifie pas que j'aie eu la possibilité d'en vérifier l'exactitude et le bien-fondé sur toute la ligne, mais simplement qu'il s'est inséré de façon suffisamment plausible dans le riche tissu de faits qui m'étaient connus de première main, pour entraîner ma conviction (à tort ou à raison...) que ce témoignage correspondait bien, pour l'essentiel, à la vérité.

Pour un lecteur attentif, je pense qu'il n'y aura aucune difficulté, à aucun moment, à faire "la part des choses" entre le compte rendu des faits et l'interprétation da ceux-ci, et (dans le premier cas) à discerner, parmi les trois sources que je viens de décrire, laquelle entre en jeu.

*   *
*

L 54 Quand j'ai fait allusion à l'instant au témoignage d'une tierce personne, dont je me suis fait l'écho sans avoir pu "en vérifier le bien-fondé sur toute la ligne", il s'agit de celui de *Zoghman Mebkhout*, au sujet de la vaste opération d'escamotage autour de son œuvre. Parmi les "faits matériels" dont je fais état dans Récoltes et Semailles, les seuls qui soient à présent sujet à controverse ou qui, selon mon propre jugement à présent, demandent rectification, sont certains des faits attestés par le seul témoignage de Mebkhout. Pour terminer ce post-scriptum, je tiens à présenter ici des commentaires critiques au sujet de la version de l'"affaire Mebkhout" présentée dans le tirage provisoire de Récoltes et Semailles. Des commentaires et des rectifications plus circonstanciés seront inclus, chacun et chacune en son lieu, dans l'édition imprimée (constituant le texte définitif de Récoltes et Semailles).

La "version Mebkhout" dont j'ai voulu me faire l'interprète, me semble consister pour l'essentiel en les deux thèses que voici :

1°) Entre 1972 et 1979, Mebkhout aurait été seul[96](*), dans l'indifférence générale et en s'inspirant de mon œuvre, à développer la "philosophie des $\mathscr{D}$-Modules", en tant que nouvelle théorie des "coefficients cohomologiques" en mon sens.

2°) Il y aurait eu un consensus unanime, tant en France qu'au niveau international, pour escamoter son nom et son rôle dans cette théorie nouvelle, une fois que sa portée a commencé à être reconnue.

Cette version était fortement documentée, d'une part par les publications de Mebkhout, tout à fait convaincantes, d'autre part par de nombreuses publications d'autres auteurs (et notamment, par celle des *Actes* du Colloque de Luminy de juin 1981), où le propos délibéré d'escamotage ne peut faire aucun doute. Enfin, les détails plus circonstanciés que Mebkhout m'a fournis ultérieurement (et dont je me fais l'écho dans la partie "l'Enterrement (3) — ou les Quatre Opérations"), sans être directement vérifiables, concordaient cependant entièrement avec une certaine ambiance générale, dont la realité ne pouvait plus faire pour moi aucun doute.

L 55 Je viens d'avoir connaissance de plusieurs faits nouveaux[97](*), qui montrent qu'il y a lieu de nuancer fortement le point 1°) ci-dessus. L'isolement dans lequel Mebkhout se trouvait[98](**) était

[96](*) Exception faite du théorème de constructibilité de Kashiwara de 1975, dont l'importance dans la théorie n'est nullement contestée. Mais selon la version de Mebkbout, ce serait là la seule et unique contribution de Kashiwara à la théorie en train de naître. Cette version (inexacte) était corroborée par l'absence d'autres publications de Kashiwara, où il aurait fait an moins allusion à certaines des idées maîtresses.

[97](*) Je suis reconnaissant à Pierre Schapira et à Christian Houzel pour avoir bien voulu attirer mon attention sur ces faits, et sur le caractère tendencieux de ma présentation du différend Mebkhout–Kashiwara.

bel et bien réel, mais c'était un isolement relatif. Il y a eu en France les travaux de J. P. *Ramis* dans le même sujet (travaux dont Mebkhout ne m'a soufflé mot), et surtout, il apparaît que certaines idées importantes développées et menées à terme par Mebkhout, et dont il s'attribue la paternité, pourraient être dues à Kashiwara[99](***). Du coup cela rend invraisemblable ou douteux certains des épisodes du différend Kashiwara–Mebkhout, tels qu'ils sont rapportés dans la version Mebkhout dont je me suis fait le (trop) fidèle interprète.

Il est hors de doute qu'au niveau du "travail sur pièces", comme aussi par la conception de certaines des idées qu'il a su mener à bonne fin, Mebkhout a été un des principaux pionniers de la nouvelle théorie des $\mathscr{D}$-Modules, peut-être même *le* principal pionnier ; le seul en tous cas qui se soit investi corps et âme dans cette tâche-là, dont la portée véritable lui échappait encore, comme elle échappait à tous. Et il est vrai aussi que l'opération d'escapotage qui a eu lieu autour de cette œuvre, opération culminant avec le Colloque de Luminy, reste pour moi une des grandes disgrâces du siècle dans le monde mathématique. Mais il serait faux de prétendre (comme je l'ai fait de bonne foi) que Mebkhout ait été le seul à la tâche. Par contre, il a été le seul à avoir l'honnêteté et le courage de dire clairement l'importance de mes idées et de mon œuvre dans ses travaux et dans l'éclosion de la théorie nouvelle.

Ce n'est pas le lieu, dans ce post-scriptum, d'entrer dans plus détails sur cette affaire — je le ferai en son lieu, y compris par des commentaires de nature à éclairer le contexte psychologique de la "version Mebkhout". Si le "contentieux Mebkhout–Kashiwara" revêt pour moi un intérêt, c'est dans la mesure seulement où il éclaire l'ambiance générale d'une époque. Et pour moi, jusque dans ses déformations même et par les forces qui ont joué pour les faire surgir, la "version Mebkhout" apparaît elle aussi, parmi d'autres matériaux moins contestables que j'apporte au "dossier d'une époque", un "signe des temps" éloquent.

Il me reste à faire amende honorable pour la légèreté, en présentant du différend Mebkhout– L 56
Kashiwara un tableau qui ne tenait compte que du témoignage et des documents fournis par Mebkhout, et ceci, comme si cette version ne pouvait faire l'objet d'aucun doute. Cette version présentait une tierce personne sous un jour ridicule, voire odieux, raison de plus pour faire preuve de prudence. Pour ma légèreté et pour ce manque de saine prudence, je présente bien volontiers ici à M. Kashiwara mes excuses les plus sincères.

[98](**) Cet isolement provenait avant tout de l'indifféence de mes ex-élèves pour les idées et les travaux de Mebkhout, qui faisait mine obstinément de s'inspirer d'un "ancêtre" voué à l'oubli par un consensus unanime...

[99](***) La plus importante de ces idées est celle de la "correspondance" (pour utiliser le jargon nouveau style) dite "de Riemann–Hilbert" pour les $\mathscr{D}$-Modules. La conjecture pertinente a été prouvée par Mebkhout, et également (selon ce que m'affirme Schapira) par Kashiwara (alors que Mebkhout m'assurait que sa démonstration etait la seule publiée). La question de la priorité pour la démonstration reste pour moi nébuleuse, et je renonce à passer le restant de mes jours à la tirer au clair...

Quant à l'énoncé-sœur en termes de $\mathscr{D}^\infty$-Modules, il ne semble pas y avoir le moindre doute que la paternité pour l'idée et pour la démonstration appartient bien à Mebkhout.