# Первый курс, осенний семестр 2015/16
# Практика по алгоритмам #5

## Статистики, бинпоиск, точки-экстремалы

## 5 октября

Собрано 30 сентября 2016 г. в 20:50

---

## Содержание

# 1. Разбор задач практики

## 1.1. Задачи про поиск точки

1. **Точки на прямой**

   a) $\sum\limits_i |x_i - x^*| \to \min$.

   Рассмотрим какое-нибудь $x$, слева от него $l$ точек, справа $r$ точек. Если сдвинем $x$ на $\varepsilon$ вправо (не перескочив ни через одну точку), то минимизируемая величина изменится на $(l-r)\varepsilon$, то есть если слева меньше, улучшится, если справа меньше, ухудшится. Отсюда видно, что нужно брать $x_{n/2}$ в отсортированном порядке.

   b) $\sum\limits_i (x_i - x^*)^2 \to \min$.

   Минимум в нуле производной. $2nx^* - 2\sum x_i = 0 \Rightarrow x^* = \frac{\sum x_i}{n}$.

   c) $\max\limits_i |x_i - x^*| \to \min$.

   Максимум либо в самой левой, либо в самой правой точке. $x^* = \frac{x_1 + x_n}{2}$.

   d) $\max\limits_i (x_i - x^*)^2 \to \min$.

   Максимизация/минимизация $(x_i - x^*)^2$ эквивалентна максимизации/минимизации $|x_i - x^*|$, $x^* = \frac{x_1 + x_n}{2}$.

2. **Точки на плоскости**

   a) $\max\limits_i \Big[\max(|x_i - x^*|, |y_i - y^*|)\Big] \to \min$.

   Максимумы координат не зависят друг от друга, одномерный случай. $x^* = \frac{x_{\min} + x_{\max}}{2}, y^* = \frac{y_{\min} + y_{\max}}{2}$.

   b) $\max\limits_i \Big[|x_i - x^*| + |y_i - y^*|\Big] \to \min$.

   Бинпоиск по ответу. Проверяем, есть ли точка, которая на расстоянии не более $M$ от каждой. Пересекаем множества точек, находящихся на расстоянии $M$ (по метрике $|x - x_i| + |y - y_i|$) от каждой из данных $(x_i, y_i)$, проверяем, пусто ли пересечение. Каждое такое множество – квадрат, повернутый на $45°$ к осям координат, с длиной диагонали $2M$. Их пересечение – прямоугольник.

   Заметим, что гораздо удобнее пересекать квадраты со сторонами, параллельными осям координат. Повернем плоскость на $45°$, найдем ответ, повернем его обратно.
   Прямое преобразование: $(x, y) \to (\frac{x+y}{2}, \frac{y-x}{2})$ (биссектриса с поворотом на $90°$). Это не настоящий поворот, а поворот с делением всех координат на $\sqrt{2}$, но это не влияет на максимизацию.
   Обратное преобразование: $(x, y) \to (x - y, x + y)$.

   Далее заметим, что после поворота и бинпоиск не нужен, получившиеся квадраты – это множества, находящиеся на фиксированном расстоянии от точки по метрике $\max(|x|, |y|)$.
   Формально: $\max(|x|, |y|) = |\frac{x+y}{2}| + |\frac{y-x}{2}|$ (доказывается разбором случаев, как какой модуль раскрывается).
   То есть свелись к предыдущей задаче и решили за $\mathcal{O}(n)$.

c) $\sum_i \Big[(x_i - x^*)^2 + (y_i - y^*)^2\Big] \to \min.$
Сумма распадается на независимые суммы по каждой координате, решается как в одномерном случае. $x^* = \frac{\sum x_i}{n}, y^* = \frac{\sum y_i}{n}$.

d) $\sum_i \Big[|x_i - x^*| + |y_i - y^*|\Big] \to \min.$
Сумма распадается на независимые суммы по каждой координате. $x^* = x_{\text{median}}, y^* = y_{\text{median}}$.

e) $\sum_i \Big[\max(|x_i - x^*|, |y_i - y^*|)\Big] \to \min.$
Повернуть плоскость на $45°$ по часовой стрелке, взять решение из предыдущей задачи, проделать с ним обратные преобразований плоскости.

3. **Точки с весами**
Рассмотрим какое-нибудь $x$, вес точек слева от него $w_l$, справа $w_r$. Если сдвинем $x$ на $\varepsilon$ вправо (не перескочив ни через одну точку), то минимизируемая величина изменится на $(w_l - w_r)\varepsilon$, то есть если слева меньше, улучшится, если справа меньше, ухудшится. Отсюда видно, что нужно брать точку, на которой префиксная сумма весов достигает половины от суммарного веса.

## 1.2. Дополнительные задачи

1. **Точки на плоскости**

f) $\max_i \Big[(x_i - x^*)^2 + (y_i - y^*)^2\Big] \to \min.$
Два вложенных тернарных поиска, по $y$ и по $x$.
Существует простой вероятностный алгоритм за $\mathcal{O}(n)$. А есть даже детерминированный за $\mathcal{O}(n)$.

g) $\sum_i \sqrt{(x_i - x^*)^2 + (y_i - y^*)^2} \to \min.$
Два вложенных тернарных поиска, по $y$ и по $x$.

2. **Поиск точки**

a) $\sum_i \Big[w_i(x_i - x^*)^2\Big] \to \min$
Дифференцируем. Получаем $x^* = \frac{\sum x_i w_i}{\sum w_i}$.

b) $\sum_i \Big[w_i(|x_i - x^*| + |y_i - y^*|)\Big] = \sum_i \Big[w_i|x_i - x^*|\Big] + \sum_i \Big[w_i|y_i - y^*|)\Big] \to \min$
Задачи поиска $x$ и $y$ независимы. Одномерную задачу мы умеем решать за $\mathcal{O}(n)$ (без сортировки) – взвешенная $k$-я порядковая статистика.

c) $\max_i \Big[w_i(|x_i - x^*| + |y_i - y^*|)\Big] \to \min.$
Решение #1: бинпоиск по ответу... внутри видим ромбики разного размера, пересекаем.
Решение #2: повернём на $45°$, получим $\max_i \Big[w_i \max(|x_i - x^*|, |y_i - y^*|)\Big] \to \min$, заметим независимость координат: $\max(\max_i \Big[w_i \max(|x_i - x^*|\Big], \max_i \Big[w_i \max(|y_i - y^*|\Big]) \to \min$. Решим одномерную задачу: можно опять применить бинпоиск по ответу, а можно заметить, что $|x_i - x^*| = \max(x_i - x^*, x^* - x_i)$, тогда нам нужно $\max_i \max(w_i(x_i - x^*), w_i(x^* - x_i)) \to \min$.

Видим максимум $2n$ линейных функций, для его поиска ищем пересечение $2n$ полуплоскостей (оно же convex hull trick) за $\mathcal{O}(sort + n)$ (отсортируем прямые по углу, сделаем проход со стеком).